수능완성

수학 나형

수학 영역

이 책의

구성과 특징

이 책의 구성

❶ 유형편

출제유형에 제시된 유형의 대표기출문제와 유제들로 유형별 학습을 할 수 있도록 하였다.

❷ 실전편

실전모의고사 5회 구성으로 수능에 대비할 수 있도록 하였다.

2017학년도 대학수학능력시험 수학영역

❶ 출제기본원칙

수학 교과의 특성을 고려하여 개념과 원리를 바탕으로 한 사고력 중심의 문항을 출제한다.

❷ 출제범위

- 단순 암기에 의하여 해결할 수 있는 문항이나 지나치게 복잡한 계산 위주의 문항 출제를 지양하고 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력을 평가할 수 있는 문항을 출제한다.
- 교육과정에 따라 이수한 수학 과목의 개념과 원리 등은 출제범위에 속하는 내용과 통합하여 출제할 수 있다.

구분 / 영역		문항수	문항유형	배점		시험 기간	출제범위(선택과목)
				문항	전체		
수학 (택1)	가형	30	1~21번 5지 선다형, 22~30번 단답형	2점 3점 4점	100점	100분	미적분 Ⅱ, 확률과 통계, 기하와 벡터
	나형						수학 Ⅱ, 미적분 Ⅰ, 확률과 통계

문항별 해설 강의 검색 안내

EBS에서 제공하고 있는 해설 강의를 문항 코드로 빠르게 확인할 수 있는 검색 서비스입니다.
문항 코드 서비스와 본 교재의 프로그램은 EBS*i* PC / 모바일 사이트 및 APP에서 더 자세한 내용을 확인할 수 있습니다.

❶ 교재에서

문항별 고유 코드를 교재에서 확인하세요.

❷ PC/스마트폰에서

문항 코드를 검색창에 입력하세요.

❸ 강의 화면에서

해설 강의를 수강합니다.

이 책의 **차례**

유형편

- EBS*i* 홈페이지(www.ebs*i*.co.kr)에 들어오셔서 회원으로 등록하세요.
- 본 방송 교재의 강의 프로그램은 EBS 인터넷 방송을 통해 다시 보실 수 있습니다. (VOD 무료 서비스 실시)
- 교재 및 강의 내용에 관한 문의는 EBS*i* 홈페이지(www.ebs*i*.co.kr)의 학습 Q&A 서비스를 활용하시기 바랍니다.

01 집합과 명제

1 집합과 원소

(1) 집합 : 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임

(2) 원소 : 집합을 이루고 있는 대상 하나하나

(3) a가 집합 A의 원소일 때, a는 집합 A에 속한다고 하며, 이것을 기호로 $a \in A$와 같이 나타낸다.

(4) 원소가 유한개인 집합 A의 원소의 개수를 기호로 $n(A)$와 같이 나타낸다.

(5) 공집합 : 원소가 하나도 없는 집합으로 기호로 $\varnothing$과 같이 나타낸다.

2 집합의 포함 관계

(1) 부분집합 : 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 부분집합이라 하고, 기호로 $A \subset B$와 같이 나타낸다.

(2) 서로 같은 집합 : $A \subset B$이고 $B \subset A$이면 두 집합 A, B는 서로 같다고 하며, 기호로 $A = B$와 같이 나타낸다.

(3) 진부분집합 : $A \subset B$이고 $A \neq B$일 때, 집합 A를 집합 B의 진부분집합이라고 한다.

(4) 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$의 부분집합의 개수는 2^n이다.

3 집합의 연산

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) 합집합 : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 또는 $x \in B\}$

(2) 교집합 : $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \in B\}$

(3) 여집합 : $A^C = \{x \mid x \in U$ 그리고 $x \notin A\}$

(4) 차집합 : $A - B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \notin B\}$

4 집합의 연산에 대한 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) 합집합과 교집합의 성질

① $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \cup U = U$

② $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \cap U = A$

③ $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$

④ $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$

⑤ $A \subset B$이면 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$

(2) 여집합과 차집합의 성질

① $U^C = \varnothing$, $\varnothing^C = U$

② $A \cup A^C = U$, $A \cap A^C = \varnothing$

③ $(A^C)^C = A$

④ $A - B = A \cap B^C = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

5 집합의 연산법칙

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙 : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(2) 결합법칙 : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 분배법칙 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) 드모르간의 법칙 : $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

6 집합의 원소의 개수

원소가 유한개인 세 집합 A, B, C에 대하여

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

이때 A, B가 서로소, 즉 $A \cap B = \varnothing$이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$이다.

(2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

7 명제와 정의

(1) **명제** : 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식

(2) **정의, 정리, 증명** : 용어를 명확하게 정한 문장을 그 용어의 정의라 하고, 정의와 성질, 가정을 통하여 참임을 보일 수 있는 명제를 정리, 어떤 명제가 참임을 보이는 과정을 증명이라고 한다.

(3) **명제의 부정** : 명제 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제 p의 부정이라 하고, 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.

8 조건과 진리집합

(1) **조건** : 문자를 포함하며 그 문자의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있는 식이나 문장

(2) **진리집합** : 전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건을 참이 되게 하는 모든 원소의 집합

(3) **조건의 부정** : 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 조건 p의 부정이라 하고, 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.

9 명제 $p \longrightarrow q$

(1) 두 조건 p, q로 이루어진 명제 'p이면 q이다.'를 기호로 $p \longrightarrow q$와 같이 나타낸다. 이때 p를 가정, q를 결론이라고 한다.

(2) 명제 $p \longrightarrow q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고, $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

② 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이고, $P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

10 '모든' 또는 '어떤'이 들어 있는 명제의 참, 거짓

전체집합을 U, 조건 p의 진리집합을 P라 할 때

(1) '모든 x에 대하여 p이다.'는 $P=U$이면 참이고, $P \neq U$이면 거짓이다.

(2) '어떤 x에 대하여 p이다.'는 $P \neq \varnothing$이면 참이고, $P=\varnothing$이면 거짓이다.

11 명제의 역과 대우

(1) 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 명제 $q \longrightarrow p$를 명제 $p \longrightarrow q$의 역, 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$를 명제 $p \longrightarrow q$의 대우라고 한다.

(2) 명제 $p \longrightarrow q$와 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 참, 거짓은 일치한다.

12 필요조건과 충분조건

(1) 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로 $p \Longrightarrow q$와 같이 나타낸다.

(2) 두 조건 p, q에 대하여 $p \Longrightarrow q$일 때 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.

(3) 두 조건 p, q에 대하여 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때 이것을 기호로 $p \Longleftrightarrow q$와 같이 나타내고, p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 한다.

13 명제의 증명

(1) **대우를 이용한 증명법** : 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 보일 때, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참임을 보이면 된다.

(2) **귀류법** : 명제를 부정하여 모순을 이끌어 냄으로써 원래 명제가 참임을 보이는 방법

14 절대부등식

(1) **절대부등식** : 문자를 포함한 부등식 중에서 그 문자에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식

(2) **절대부등식을 증명할 때 이용되는 실수의 성질** : 두 실수 a, b에 대하여

① $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$

② $a^2 \geq 0$, $a^2+b^2 \geq 0$

③ $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$, $b=0$

④ $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$

⑤ $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2$

정답과 풀이 4쪽

유형 1 집합의 표현법, 포함 관계, 집합의 원소의 개수

출제유형 | 집합의 뜻과 표현법을 묻는 문제, 집합의 포함 관계를 묻는 문제, 집합의 원소의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 집합의 원소인 것과 아닌 것을 구별하고, 기호 $\in$, $\not\in$ 은 원소와 집합 사이의 관계를 나타낼 때 사용하고, 기호 $\subset$, $\not\subset$ 은 집합과 집합 사이의 관계를 나타낼 때 사용함을 알고 이를 구분하여야 한다.

(2) 조건을 제시하여 나타낸 집합인 경우 공통된 성질을 이용하여 구체적인 원소를 구한다.

필수 유형 | 2004학년도 대수능 |

집합 $A(k)$를 자연수 k를 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이라 하자. 예를 들면 $k=2$인 경우에 $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $\cdots$이므로 $A(2)=\{2, 4, 6, 8\}$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기

ㄱ. $1\in A(3)$

ㄴ. $A(6)\subset A(3)$

ㄷ. $A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다. (단, $n>1$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

출제 의도

집합과 원소, 집합과 집합 사이의 포함 관계를 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

ㄱ. $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$이므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

따라서 $1\in A(3)$ (참)

ㄴ. $6^1=6$, $6^2=36$, $6^3=216$, $\cdots$이므로 $A(6)=\{6\}$

따라서 $A(6)\not\subset A(3)$ (거짓)

ㄷ. $n=5$이면 $3^5=243$이고 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합을 구하면 $A(3^5)=\{1, 3, 7, 9\}$이므로

$A(3^5)=A(3)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

01

6051-0001

집합 $A=\{\varnothing, 0\}$에 대하여 옳지 않은 것은?

① $\varnothing\in A$ ② $0\in A$ ③ $\varnothing\subset A$

④ $\{\varnothing\}\subset A$ ⑤ $\{\varnothing, 0\}\in A$

02

6051-0002

집합 $A=\{2, 3, 4, 6\}$에 대하여 집합 X를

$X=\{(a, b)\,|\,a\in A, b\in A, b$는 a의 약수$\}$

라 할 때, $n(X)$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

03

6051-0003

집합 $A=\{-i, i, -1, 1\}$에 대하여 두 집합 B, C를 각각

$B=\{x+y\,|\,x\in A, y\in A\}$, $C=\{xy\,|\,x\in A, y\in A\}$

라 하자. $n(B)+n(C)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

04

6051-0004

실수 전체의 집합의 부분집합 A는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $3\in A$

(나) $x\in A$이면 $\dfrac{1}{1-x}\in A$

$n(A)$의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

05

6051-0005

자연수 k에 대하여 포물선 $y=-x^2+kx+2k^2$과 직선 $y=x+k$가 만나는 두 점 사이의 거리를 $l(k)$, 집합 $A_k=\{a\,|\,a\le l(k), a$는 자연수$\}$라 하자. $n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)$의 값을 구하시오.

유형 2 집합의 연산과 연산에 대한 성질

출제유형 | 합집합, 교집합, 차집합, 여집합에 대한 연산 문제 또는 집합의 연산의 성질에 대한 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 합집합, 교집합, 차집합, 여집합의 연산을 할 수 있어야 하고 집합의 연산의 성질, 특히 $A \subset B$이면 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$인 것을 정확히 알고 있어야 한다. 또 간단한 연산은 벤 다이어그램을 이용한다.

필수 유형

두 집합 $A = \{-3, 1\}$, $B = \{x \mid a^2x = 2ax + 3\}$에 대하여 $A \cup B = A$를 만족시키는 모든 상수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

출제 의도

집합의 연산에 대한 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$B = \{x \mid a^2x = 2ax + 3\}$
$= \{x \mid (a^2 - 2a)x = 3\}$

두 집합 A, B에 대하여 $A \cup B = A$를 만족시키려면 $B \subset A$이어야 한다.

(ⅰ) $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 집합 $B = \varnothing$인 경우 $B \subset A$를 만족시킨다. 즉, 방정식 $(a^2 - 2a)x = 3$의 해가 존재하지 않아야 한다.
따라서 $a = 0$ 또는 $a = 2$

(ⅱ) $B \neq \varnothing$인 경우 집합 B의 원소는 -3 또는 1이다.
이때 $-3 \in B$이면
$(a^2 - 2a) \times (-3) = 3$, $a^2 - 2a + 1 = 0$, $(a-1)^2 = 0$에서
$a = 1$
$1 \in B$이면 $(a^2 - 2a) \times 1 = 3$, $a^2 - 2a - 3 = 0$
$(a-3)(a+1) = 0$에서 $a = -1$ 또는 $a = 3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수 a의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 주어진 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 개수는 5이다.

답 ④

[참고]

x에 대한 방정식 $ax = b$에서

(ⅰ) $a \neq 0$이면 $x = \frac{b}{a}$ (해 1개)

(ⅱ) $a = 0$이고 $b \neq 0$이면 $0 \times x = b$이므로 해는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $a = 0$이고 $b = 0$이면 $0 \times x = 0$이므로 해는 무수히 많다.

06 6051-0006

전체집합 $U = \{(x, y) \mid x, y$는 실수$\}$의 두 부분집합 A, B가

$A = \{(x, y) \mid y = -x^2 + k\}$, $B = \{(x, y) \mid y = 2x + 10\}$

일 때, $n(A \cap B) = 2$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

07 6051-0007

두 집합 $A = \{2, a^3 - 4a^2 + a + 9, 6\}$,
$B = \{3, a+2, a^2 + 2a - 2, a^3 - 2a^2 + a - 1\}$에 대하여
$A \cap B = \{3, 6\}$일 때, 집합 $A \cup B$의 모든 원소의 합은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

08 6051-0008

두 집합

$A = \{x \mid (x-3)(x-50) > 0\}$
$B = \{x \mid (x-a)(x-a^2) \le 0\}$

에 대하여 $A \cap B = \varnothing$을 만족시키는 자연수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

09 6051-0009

전체집합 $U = \{(x, y) \mid x, y$는 실수$\}$의 두 부분집합 A, B가

$A = \{(x, y) \mid (x-6)^2 + y^2 = 4\}$
$B = \{(x, y) \mid (x-k)^2 + y^2 = k^2\}$

일 때, $n(A \cap B) = 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

유형 3 부분집합의 개수

출제유형 | 부분집합의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$일 때, 부분집합의 개수는 다음과 같다.

(1) 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n이다.

(2) 특정한 원소 k개를 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-k}이다.

(단, k는 $1\le k\le n$인 자연수)

(3) 특정한 원소 k개는 모두 포함하고 특정한 원소 l개는 모두 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-l}이다.

(단, k와 l은 $k+l\le n$인 자연수)

필수 유형

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합

$A=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여

$A\cup C=B\cup C$를 만족시키는 전체집합 U의 부분집합 C의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 16

④ 32 ⑤ 64

출제 의도

주어진 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$A\cup C=B\cup C$에서 $A\subset(B\cup C)$이고 $B\subset(A\cup C)$

(i) $A\subset(B\cup C)$에서

$2\notin B$, $4\notin B$, $8\notin B$이고 $2\in A$, $4\in A$, $8\in A$이므로

$2\in C$, $4\in C$, $8\in C$

(ii) $B\subset(A\cup C)$에서

$3\notin A$, $9\notin A$이고 $3\in B$, $9\in B$이므로 $3\in C$, $9\in C$

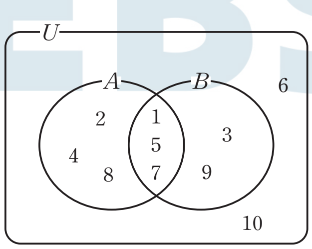
(i), (ii)에서 집합 C는 2, 3, 4, 8, 9를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 C는 전체집합 U의 부분집합 중에서 원소 2, 3, 4, 8, 9를 모두 포함하는 집합이므로 집합 $\{1, 5, 6, 7, 10\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 집합 C의 개수는 $2^5=32$

답 ④

[참고]



정답과 풀이 5쪽

10

6051-0010

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$의 두 부분집합

$A=\{1, 2, 3, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여

$(B-A)\cup X=X$, $B\cup X=B$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 16

④ 32 ⑤ 64

11

6051-0011

자연수를 원소로 가지는 집합 X의 최소 원소를 $m(X)$라 하자.

예를 들어 $X=\{3, 4, 7\}$이면 $m(X)=3$이다.

집합 $A=\{x\,|\,x$는 20 이하의 소수$\}$의 부분집합 B에 대하여

$m(B)\le 8$을 만족시키는 집합 B의 개수를 구하시오.

12

6051-0012

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 A에 대하여 $S(A)$를 A의 부분집합의 개수라 하자. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, A^C은 A의 여집합이다.)

보기

ㄱ. $S(A)\times S(A^C)=2^{10}$

ㄴ. $S(A-B)=S(A)-S(A\cap B)$

ㄷ. $S(A\cup B)=\dfrac{S(A)\times S(B)}{S(A\cap B)}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 4 집합의 연산법칙

출제유형 | 집합의 연산법칙을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 연산법칙을 이용한다.

(1) 교환법칙 : $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

(2) 결합법칙 : $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 분배법칙 : $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) 드모르간의 법칙 : $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

필수 유형

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $(A-B)\cup(A-B^C)=A$
ㄴ. $(A-B)\cap(B-C)\cap(C-A)=\varnothing$
ㄷ. $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=U$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도

집합의 연산법칙을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

ㄱ. $(A-B)\cup(A-B^C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$
$=A\cap(B^C\cup B)$
$=A\cap U=A$ (참)

ㄴ. $A-B=A\cap B^C$
$B-C=B\cap C^C$
$C-A=C\cap A^C$
따라서
$(A-B)\cap(B-C)\cap(C-A)$
$=(A\cap B^C)\cap(B\cap C^C)\cap(C\cap A^C)$
$=(A^C\cap A)\cap(B^C\cap B)\cap(C^C\cap C)=\varnothing$ (참)

ㄷ. $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)\neq U$
[반례] $A\cup B=U$이고 $A\cap B\neq\varnothing$인 경우
$(A\cup B)-(A\cap B)\neq U$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

13 6051-0013

전체집합 U의 공집합이 아닌 서로 다른 두 부분집합 A, B가 $(A-B)\subset(B-A)$를 만족시킬 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $A\subset B$ ② $B\subset A$ ③ $A\cap B=\varnothing$
④ $A\cup B=U$ ⑤ $A\cup B\neq U$

14 6051-0014

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A-B=\varnothing$이면 $A\cup B=B$이다.
ㄴ. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$
ㄷ. $A\cup(B-A)=A\cup B$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 6051-0015

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$A\cup B^C=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $(A\cap B)^C=\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
일 때, 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

16 6051-0016

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $(A-B)^C\cap A=A\cap B$
ㄴ. $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cup C)$
ㄷ. $(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 6쪽

유형 5 집합의 원소의 개수

출제유형 | 실생활과 관련된 집합의 원소의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 원소가 유한개인 두 집합 A, B에 대하여

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
이때 A, B가 서로소이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이다.

(2) 실생활과 관련된 문제는 각각의 조건을 집합으로 나타내고, 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

필수 유형 | 2004학년도 대수능 |

세 집합 A, B, C에 대하여
$n(A)=14$, $n(B)=16$, $n(C)=19$, $n(A\cap B)=10$, $n(A\cap B\cap C)=5$일 때, $n(C-(A\cup B))$의 최솟값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [3점]

출제 의도

원소가 유한개인 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$n(C-(A\cup B))=n(C)-n(C\cap(A\cup B))$

$=19-n(C\cap(A\cup B))$ …… ㉠

㉠의 값이 최소일 때는 $n(C\cap(A\cup B))$의 값이 최대일 때이다.

$C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B)$이므로

$n(C\cap(A\cup B))=n(C\cap A)+n(C\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

$=n(C\cap A)+n(C\cap B)-5$ …… ㉡

㉡의 값이 최대일 때는 $n(C\cap A)+n(C\cap B)$의 값이 최대일 때이다.

$n(A\cap B)=10$, $n(A\cap B\cap C)=5$이므로

$n((A\cap B)-C)=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

$=10-5=5$

따라서

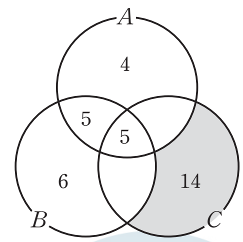
$n(C\cap A)\le n(A)-n((A\cap B)-C)=14-5=9$

$n(C\cap B)\le n(B)-n((A\cap B)-C)=16-5=11$

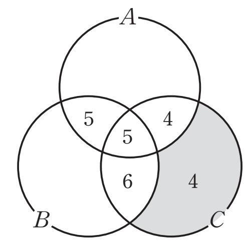
따라서 ㉡에서 $n(C\cap(A\cup B))$의 최댓값은
$9+11-5=15$이므로 ㉠에서 구하는 최솟값은
$19-15=4$이다.

답 4

[참고]
벤 다이어그램을 그려 보면 최소인 경우를 쉽게 찾을 수 있다.
다음 벤 다이어그램에서 $n(C-(A\cup B))$가 최대가 되는 경우는 [그림 1]이고 최소가 되는 경우는 [그림 2]이다.
이때 벤 다이어그램 안의 수는 각 벤 다이어그램이 나타내는 집합에 속하는 원소의 개수이다.



[그림 1]



[그림 2]

17 6051-0017

학생 수가 50명인 어느 동아리에서 축구, 농구, 배구 시합을 하였다. 모든 학생들은 3가지 종목 중 적어도 하나의 종목에 선수로 참가하였다. 축구 시합에 참가한 학생 중 농구 시합에 참가하지 않은 학생은 15명, 농구 시합에 참가한 학생 중 배구 시합에 참가하지 않은 학생은 18명이고 3가지 종목에 모두 참가한 학생은 8명이었다. 배구 시합에 참가한 학생 중 축구 시합에 참가하지 않은 학생의 수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

18 6051-0018

어느 학급의 학생 36명은 제주도, 울릉도, 설악산의 세 곳 중 적어도 한 곳을 가본 적이 있다. 제주도와 울릉도를 모두 가본 적이 있는 학생은 15명, 제주도와 설악산을 모두 가본 적이 있는 학생은 18명이고 울릉도와 설악산을 모두 가본 적이 있는 학생은 없다고 한다. 제주도, 울릉도, 설악산 세 곳 중 오직 한 장소만 가본 적이 있는 학생의 수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

19 6051-0019

어느 학교 60명의 학생에 대하여 논술, 수학 두 과목의 경시대회 중 논술 경시대회를 신청한 학생이 38명, 수학 경시대회를 신청한 학생이 41명일 때, 논술과 수학 두 과목의 경시대회를 모두 신청한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오.

정답과 풀이 7쪽

유형 6 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합의 관계, 명제의 역, 대우

출제유형 | 조건과 그 진리집합의 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별하는 문제, 명제의 부정 및 역과 대우에 대한 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 명제의 정의를 정확히 알고 있어야 하며 명제와 그 진리집합의 관계를 이해하고 이를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있어야 한다.
(2) 명제 $p \longrightarrow q$의 역은 $q \longrightarrow p$이고, 명제 $p \longrightarrow q$의 대우는 $\sim q \longrightarrow \sim p$이다.

필수 유형 | 2003학년도 대수능 |

전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 두 명제 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 모두 참일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [2점]

보기

ㄱ. $P \subset R$　　ㄴ. $(P \cup Q) \subset R^C$
ㄷ. $(P^C \cap R^C) \subset Q^C$

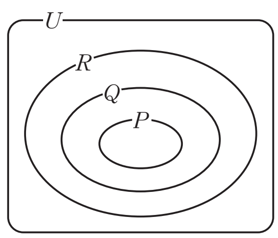
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도

명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합의 관계를 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$p \longrightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$이고, $q \longrightarrow r$가 참이므로 $Q \subset R$이다.
따라서 $P \subset Q \subset R$
이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $P \subset Q \subset R$이므로
$P \subset R$ (참)
ㄴ. $P \subset Q$이므로
$P \cup Q = Q$
$Q \subset R$이므로 $Q \not\subset R^C$
즉, $(P \cup Q) \not\subset R^C$ (거짓)
ㄷ. $P^C \cap R^C = (P \cup R)^C$
$P \subset R$이므로 $(P \cup R)^C = R^C$
$Q \subset R$이므로 $R^C \subset Q^C$
즉, $P^C \cap R^C = (P \cup R)^C = R^C \subset Q^C$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

20

6051-0020

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p : $-3 < x < a+2$,　q : $|x-5| \geq 2$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

21

6051-0021

전체집합 U의 서로 다른 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이다. $Q \subset P \subset R^C$일 때, **보기**의 명제 중 항상 참인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $r \longrightarrow \sim q$　　ㄴ. (p 그리고 q) $\longrightarrow r$
ㄷ. (p 또는 q) $\longrightarrow \sim r$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22

6051-0022

실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p : $1 \leq x \leq 3$,　q : $6 < x < 8$,　r : $x > k$

두 명제 $q \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim p$가 모두 참이 되도록 하는 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값은?

① 3　② 6　③ 8
④ 18　⑤ 24

정답과 풀이 8쪽

유형 7 **필요조건과 충분조건**

출제유형 | 충분조건 또는 필요조건을 만족시키는 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 조건과 그 진리집합 사이의 관계를 이해하고, 각 조건에 맞는 진리집합을 구한 후 수직선에 포함 관계를 나타내어 값을 구하도록 한다.

필수 유형 | 2003학년도 대수능 |

양의 실수 a와 b에 대하여 집합 A와 B를 다음과 같이 정의한다.

$A=\{x\,|\,(x-a)(x+a)\le 0\}$

$B=\{x\,|\,|x-1|\le b\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은? [3점]

① $a-b<1$ ② $a-b>1$ ③ $a+b=1$
④ $a+b<1$ ⑤ $a+b>1$

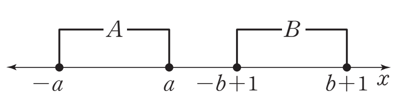
출제 의도

두 집합이 서로소가 되기 위한 필요충분조건을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

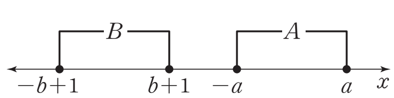
풀이

두 집합 $A=\{x\,|\,(x-a)(x+a)\le 0\}=\{x\,|\,-a\le x\le a\}$
$B=\{x\,|\,|x-1|\le b\}=\{x\,|\,-b+1\le x\le b+1\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$을 만족시키도록 수직선 위에 집합 A, B를 나타내면 그림과 같다.

(ⅰ) $a<-b+1$이면 $a+b<1$



(ⅱ) a, b는 양수이므로 항상 $b+1>-a$이다.



따라서 이 조건을 만족시키는 양수 a, b의 값은 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b<1$

답 ④

23

6051-0023

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p : $x^2-6x+5\le 0$, q : $|x-2|\le a$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

24

6051-0024

양수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p : $2x-5\ge 7$

q : $x\ge n$

r : $x^2-9x>10$

q는 p이기 위한 충분조건이고 r는 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

25

6051-0025

두 실수 x, y에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p : $x=y=0$, q : $x^2+kxy+y^2=0$

p가 q이기 위한 필요충분조건이 되도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 8 절대부등식

출제유형 | 실수의 성질 또는 절대부등식을 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 실수 a, b에 대하여

① $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$

② $a=b \Longleftrightarrow a-b=0$

③ $a<b \Longleftrightarrow a-b<0$

(2) 실수 a, b에 대하여

① $a^2\geq 0$, $a^2+b^2\geq 0$

② $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$, $b=0$

(3) 산술평균과 기하평균의 관계 : $a>0$, $b>0$일 때

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

필수 유형

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X의 모든 원소들의 곱을 $S(X)$라 하자.
$A\cup B=U$, $A\cap B=\{4, 5\}$를 만족시키는 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $S(A)$, $S(B)$의 합 $S(A)+S(B)$의 최솟값을 구하시오.

출제 의도

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B=\{4, 5\}$에서

$$\begin{aligned}S(A)\times S(B)&=S(A\cup B)\times S(A\cap B)\\&=(1\times2\times3\times4\times5\times6)\times(4\times5)\\&=4^2\times5^2\times6^2\\&=120^2\end{aligned}$$

산술평균과 기하평균의 관계에서

$$\frac{S(A)+S(B)}{2}\geq\sqrt{S(A)\times S(B)}$$

(단, 등호는 $S(A)=S(B)$일 때 성립)

이므로

$S(A)+S(B)\geq 2\sqrt{120^2}=2\times120=240$

(단, 등호는 $S(A)=S(B)=120$일 때 성립)

따라서 $S(A)+S(B)$의 최솟값은 240이다.

답 240

[참고]
$A=\{4, 5, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때
$S(A)=S(B)=120$이 되고 이때 $S(A)+S(B)$의 값이 최소가 된다.

26 6051-0026

두 양수 a, b에 대하여 $(4a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

27 6051-0027

양수 x에 대한 함수 $f_n(x)=nx+\frac{4n}{x}+2$ $(n=1, 2, 3)$에 대하여 $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$의 최솟값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

28 6051-0028

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^2+(k+4)x+2k>-x^2+2x+2$$

를 만족시키는 정수 k의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

29 6051-0029

모든 실수 x, y에 대하여 부등식

$$x^2+2xy+y^2-2ax+4y-b>0$$

이 성립할 때, $a+b$의 최댓값은? (단, a, b는 정수이다.)

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

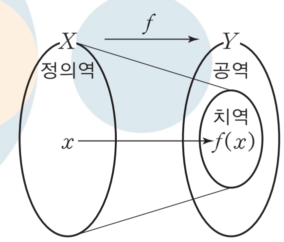
수학Ⅱ

02 함수

1 함수

(1) 대응 : 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다.

(2) 함수 : 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 하고, 기호로 $f : X \longrightarrow Y$와 같이 나타낸다. 이때 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라 하고, 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 치역이라고 한다.



(3) 그래프 : 함수 $f : X \longrightarrow Y$에 대하여 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 전체의 집합, 즉 $\{(x,\ f(x)) \mid x \in X\}$를 함수 f의 그래프라고 한다.

2 여러 가지 함수

(1) 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 이 함수 f를 일대일함수라고 한다.

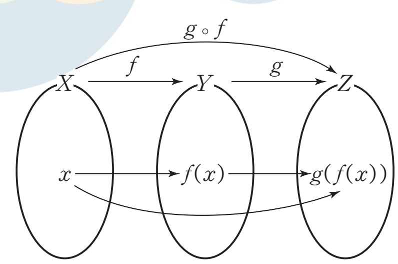
(2) 함수 $f : X \longrightarrow Y$가 일대일함수이고 치역과 공역이 서로 같을 때, 이 함수 f를 일대일 대응이라고 한다.

(3) 함수 $f : X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉 $f(x) = x$일 때, 이 함수 f를 항등함수라고 한다.

(4) 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉 $f(x) = c$ (c는 상수)일 때 이 함수 f를 상수함수라고 한다.

3 합성함수

(1) 합성함수 : 두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$가 주어졌을 때, 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시킨 X에서 Z로의 함수를 f와 g의 합성함수라 하고, 기호로 $g \circ f : X \longrightarrow Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$와 같이 나타낸다.



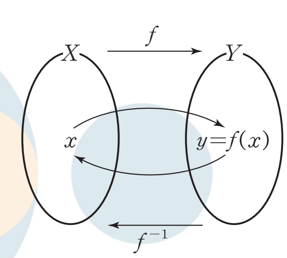
(2) 합성함수의 성질 : 세 함수 f, g, h에 대하여

① 함수의 합성에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다. 즉, $f \circ g \neq g \circ f$

② 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다. 즉, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

4 역함수

(1) 역함수 : 함수 $f : X \longrightarrow Y$가 일대일 대응일 때, Y의 각 원소 y에 $f(x) = y$를 만족시키는 X의 원소 x가 대응되는 함수를 f의 역함수라 하고, 기호로 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, $x = f^{-1}(y)$와 같이 나타낸다.



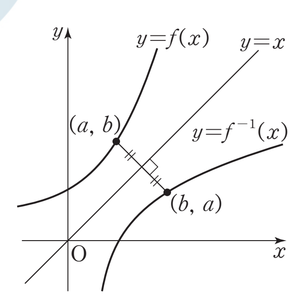
(2) 역함수의 성질

함수 $f : X \longrightarrow Y$가 일대일 대응이고 $x \in X$, $y \in Y$일 때

① 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 존재한다. ② $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

③ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$ ④ $(f^{-1})^{-1} = f$

⑤ 함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.



참고 역함수를 구하는 방법

① $y = f(x)$를 x에 대하여 푼 후 x와 y를 서로 바꾼다.

② $y = f(x)$의 치역을 구하고 이를 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 정의역으로 한다.

5 유리식

(1) 두 다항식 A, B에 대하여 $\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라고 한다.

특히 분모 B가 0이 아닌 상수이면 $\dfrac{A}{B}$는 다항식이 된다.

(2) **유리식의 성질** : 네 다항식 A, B, C, D에 대하여

① 유리식의 덧셈, 뺄셈 : $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$, $\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$ (단, $C\neq0$)

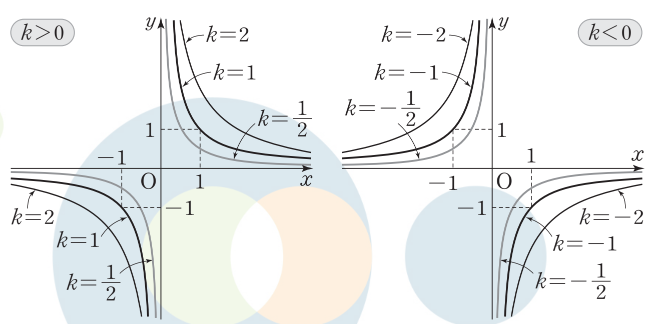
② 유리식의 곱셈, 나눗셈 : $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$, $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$ (단, $B\neq0$, $C\neq0$, $D\neq0$)

참고 부분분수 : $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

6 유리함수

(1) **유리함수** : 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 유리함수라고 한다. 특히 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 다항함수라고 한다. 유리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 분모를 0으로 하는 원소를 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

(2) **유리함수** $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$**의 그래프**



① 정의역과 치역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

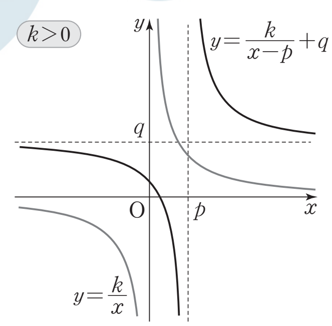
② $k>0$이면 그래프는 제1, 3사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제2, 4사분면에 있다.

③ 그래프는 원점과 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.

④ 점근선은 x축, y축이다.

(3) **유리함수** $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$**의 그래프**

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.



7 무리식

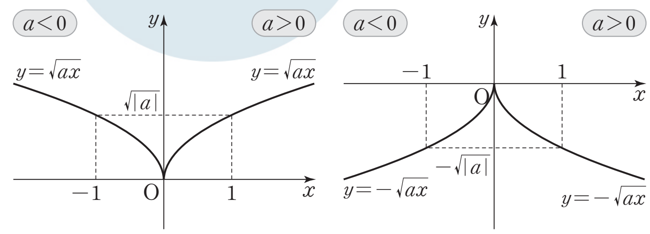
(1) **무리식** : 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로 유리식으로 나타낼 수 없는 식

(2) 무리식의 값이 실수가 되려면 (근호 안의 식의 값)≥0이어야 한다. 즉, $\sqrt{A}$가 실수 $\Longleftrightarrow A\geq0$

8 무리함수

(1) **무리함수** : 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다.

(2) **무리함수** $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$**의 그래프**



① $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.
$a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\leq0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.

② 함수 $y=-\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

(3) **무리함수** $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$**의 그래프**

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

유형 1 여러 가지 함수와 함숫값

출제유형 | 함수와 관련된 여러 가지 개념에 대한 문제, 주어진 조건을 만족시키는 함숫값을 구하거나 함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수의 정의와 성질을 정확히 이해하고 다음 함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.
모든 실수 x에 대하여
(1) $f(-x)=f(x)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
(2) $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
(3) 함수 $f(x)$가 주기가 p인 함수이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시킨다. (단, $p\neq 0$)

필수 유형 | 2003학년도 대수능 |

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기
ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다.
ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일 대응이면 $y=h(x)$도 일대일 대응이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도
함수의 그래프의 대칭성 및 함수의 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 좌표를 (a, k)라 하면 $f(a)=g(a)=k$이다.
따라서 $h(a)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}g(a)=\frac{1}{3}k+\frac{2}{3}k=k$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다. (참)
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$이다.
따라서

$$h(-x)=\frac{1}{3}f(-x)+\frac{2}{3}g(-x)$$
$$=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)=h(x)$$

이므로 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. [반례] $f(x)=2x$, $g(x)=-x$라 하면 $f(x)$와 $g(x)$는 일대일 대응이지만 $h(x)=0$은 일대일 대응이 아니다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

01 6051-0030
자연수 n에 대하여 x에 대한 다항식 x^3-2x^2+kx-1을 일차식 $x-n$으로 나눈 나머지를 $f(n)$이라 하자.
$f(1)+f(2)+f(3)=-13$일 때, 상수 k의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

02 6051-0031
집합 $X=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 X에서 실수 전체의 집합으로의 두 함수 f, g가 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $g(x)=(x+2)^2$이다. 두 함수 f, g가 서로 같을 때, $2a+b+c$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

03 6051-0032
함수 f는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고 $-1\le x<1$일 때 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1\le x<0) \\ x & (0\le x<1) \end{cases}$이다.
$f(2017)$의 값은?

① 1 ② 5 ③ 10
④ 15 ⑤ 20

04

6051-0033

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

(가) $f(1)=5$
(나) 임의의 두 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)-f(x)=2xy+y^2+3y$이다.

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

05

6051-0034

함수 f가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-1)+1$을 만족시키고

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{4}{3}x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

06

6051-0035

일차함수 $f(x)=ax+b$가 모든 실수 x에 대하여
$3f(x)-2f(1-x)=2x$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

유형 2 함수의 개수

출제유형 | 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수의 정의를 정확히 알고 정의역의 원소에 대응하는 공역의 원소의 개수를 세어 문제를 해결한다.

필수 유형

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

(가) $f(3)=4$
(나) $x_1\in X$, $x_2\in X$에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

출제 의도

주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(3)=4$이므로
(i) $f(1)=1$일 때, $f(2)=2$ 또는 $f(2)=3$
이때 $f(4)=5$이면 $f(5)=6$ 또는 $f(5)=7$
$f(4)=6$이면 $f(5)=7$
따라서 함수 f의 개수는 $2\times(2+1)=2\times3=6$
(ii) $f(1)=2$일 때, $f(2)=3$
이때 $f(4)=5$이면 $f(5)=6$ 또는 $f(5)=7$
$f(4)=6$이면 $f(5)=7$
따라서 함수 f의 개수는 $2+1=3$
(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 $6+3=9$

답 ⑤

07

6051-0036

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 a, X에서 Y로의 일대일함수의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 165 ② 175 ③ 185
④ 195 ⑤ 205

정답과 풀이 11쪽

유형 3 합성함수

출제유형 | 합성함수를 구하는 문제, 합성함수의 성질에 대한 문제, 합성함수의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 세 함수 f, g, h에 대하여

① $f\circ g\neq g\circ f$

② $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

필수 유형 | 2002학년도 대수능 |

두 함수 $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=x^2-ax+4$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는?

(단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.) [3점]

① $a\leq -1$, $a\geq 1$ ② $-1\leq a\leq 1$ ③ $a\leq -2$, $a\geq 2$
④ $-2\leq a\leq 2$ ⑤ $-4\leq a\leq 4$

출제 의도

합성함수를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$
$g(x)=x^2-ax+4$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x)-3)(g(x)+2)\geq 0$
따라서 $g(x)\geq 3$ 또는 $g(x)\leq -2$
(i) $g(x)\geq 3$인 경우
$x^2-ax+4\geq 3$, $x^2-ax+1\geq 0$
모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
$x^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4\leq 0$이어야 한다.
따라서 $-2\leq a\leq 2$
(ii) $g(x)\leq -2$인 경우
$x^2-ax+4\leq -2$, $x^2-ax+6\leq 0$
$h(x)=x^2-ax+6$으로 놓으면 $y=h(x)$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\leq 0$일 수 없다.
(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $-2\leq a\leq 2$이다.

답 ④

08

6051-0037

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x\text{가 유리수}) \\ -1 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$$

일 때, $3f(\sqrt{3})-4(f\circ f)(\sqrt{3})$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

09

6051-0038

일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(0)=-3$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x+2))=4x-1$을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

10

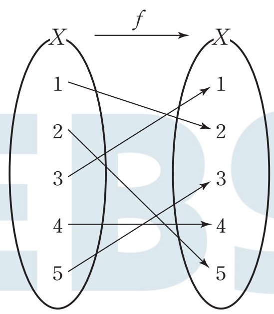
6051-0039

이차함수 $f(x)=x^2+4x-1$과 일차함수 $g(x)=-2x+3$에 대하여 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$라 하자.
$-1\leq x\leq 4$에서 $h(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

11

6051-0040

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$는 그림과 같이 대응하고 함수 $g: X \longrightarrow X$는 $g(1)=5$이고 $f \circ g=g \circ f$를 만족시킨다. $g(3)+g(5)$의 값은?



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

12

6051-0041

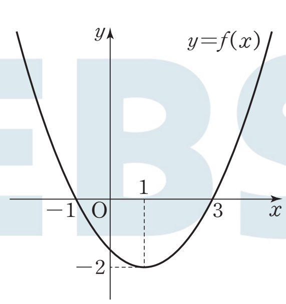
자연수 n에 대하여 $f(n)=2^n$이고 n의 각 자리의 수의 합을 10으로 나눈 나머지를 $g(n)$이라 하자. 예를 들면 $g(4)=4$, $g(48)=2$이다. 두 함수 $y=f(n)$, $y=g(n)$에 대하여 $g(f(n))=1$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

13

6051-0042

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 모든 실근의 곱은?

(단, $f(-1)=f(3)=0$, $f(1)=-2$)



① -9 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 9

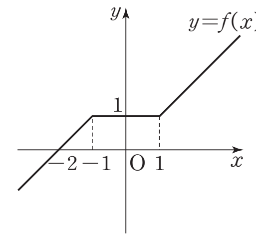
14

6051-0043

함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 1 & (-1\le x\le 1) \\ x & (x>1) \end{cases}$$

일 때, 함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

15

6051-0044

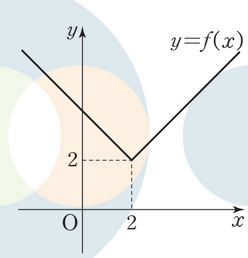
실수 x에 대하여 $t^2=x^2-4$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수를 $f(x)$라 하자. 예를 들면 $f(5)=2$, $f(0)=0$이다.
함수 $y=f(x)$와 일차함수 $g(x)=3x-1$에 대하여 $(f \circ g)(3)-(g \circ f)(-1)$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

16

6051-0045

함수 $f(x)=|x-2|+2$에 대하여 방정식 $(f \circ f \circ f)(x)=6$의 모든 실근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

유형 4 역함수

출제유형 | 주어진 함수의 역함수를 구하거나 역함수의 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일 대응일 때, 다음 성질과 역함수를 구하는 방법을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.

(2) $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$

(3) $(f^{-1}\circ f)(x)=x\ (x\in X)$, $(f\circ f^{-1})(y)=y\ (y\in Y)$

(4) 역함수 구하는 방법

$y=f(x)$를 x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$로 변형한 후 x와 y를 서로 바꾸어 주면 $y=f^{-1}(x)$이다.

필수 유형

함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 역함수를 $y=g(x)$라 하자. $f(1)=2$, $g(7)=6$일 때, $a-b$의 값은?

(단, $a\neq 0$이고, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

출제 의도

역함수의 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=y=\sqrt{ax+b}$의 양변을 제곱하면

$y^2=ax+b$, $ax=y^2-b$, $x=\frac{1}{a}y^2-\frac{b}{a}$

이므로

$g(x)=\frac{1}{a}x^2-\frac{b}{a}\ (x\geq 0)$

$f(1)=\sqrt{a+b}=2$이므로

$a+b=4$ …… ㉠

$g(7)=\frac{49-b}{a}=6$이므로

$6a+b=49$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $5a=45$이므로 $a=9$, $b=-5$

따라서 $a-b=14$

답 ⑤

[다른 풀이]

$f(1)=\sqrt{a+b}=2$이므로

$a+b=4$ …… ㉠

$g(7)=6$에서 $f(6)=7$이므로 $\sqrt{6a+b}=7$

$6a+b=49$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=9$, $b=-5$이므로 $a-b=14$

17 6051-0046

집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가 일대일 대응이고 $f(1)=2$, $(f\circ f)(1)=3$을 만족시킬 때, $f(3)+f^{-1}(3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18 6051-0047

$n\times x$의 일의 자리의 수를 $f_n(x)$라 하자. 예를 들면 $f_3(4)=2$, $f_1(3)=3$이다. 집합 $X=\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $y=f_n(x)$ 중 그 역함수가 존재하는 함수의 개수는?

(단, $n=1, 3, 5, 7, 9$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19 6051-0048

일차함수 f가 $f(2x+3)=4x-1$을 만족시킬 때, $f^{-1}(-2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

20

6051-0049

일대일 대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$, 함수 $y=f(x+2)$의 역함수를 $y=h(x)$라 하자. $g(5)=2$일 때, $h(5)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

21

6051-0050

두 일차함수 $f(x)=-3x+2$, $g(x)=2x-3$에 대하여 함수 h가 $(f\circ g)^{-1}\circ h=f^{-1}$를 만족시킬 때, $h(-1)$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

22

6051-0051

함수 $f(x)=2a|x-2|+3x$의 역함수가 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

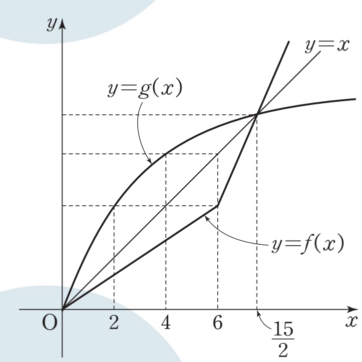
유형 5 역함수의 그래프의 성질

출제유형 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 것을 이용하여 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하거나 직접 함수 $f(x)$의 역함수를 구하여 해결한다.

필수 유형

그림은 $x\geq 0$에서 정의되고 일대일 대응인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $g^{-1}(f(6))+f^{-1}(g(2))$의 값은?

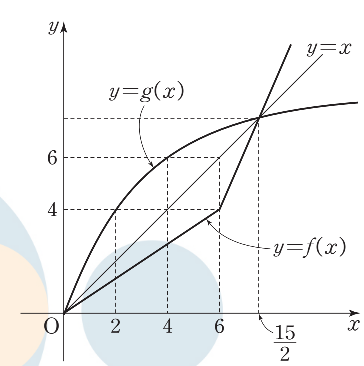


① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

출제 의도

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



그림에서
$f(6)=4$이므로
$g^{-1}(f(6))=g^{-1}(4)=\alpha$
라 하면
$g(\alpha)=4$에서 $\alpha=2$
따라서
$g^{-1}(f(6))=g^{-1}(4)=2$
$g(2)=4$이므로
$f^{-1}(g(2))=f^{-1}(4)=\beta$
라 하면
$f(\beta)=4$에서 $\beta=6$
따라서 $f^{-1}(g(2))=6$이므로
$g^{-1}(f(6))+f^{-1}(g(2))=2+6=8$

답 ⑤

23

6051-0052

함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x & (x<3) \\ x-1 & (3\le x<5) \\ 2x-6 & (x\ge 5) \end{cases}$$

일 때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(2)+(f\circ f)(5)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

24

6051-0053

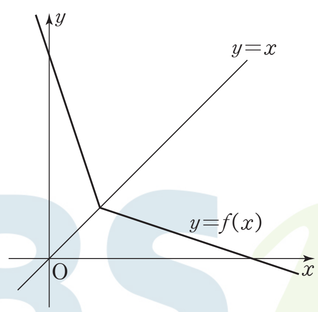
함수 f는

$$f(x)=\begin{cases} -3x+8 & (x<2) \\ -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3} & (x\ge 2) \end{cases}$$

이다. 함수 g가 모든 실수 x에 대하여

$g(f^{-1}(x))+g(f(x))=2x+5$

를 만족시킬 때, $g(5)$의 값은?



① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

25

6051-0054

함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & (x<-1) \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} & (x\ge -1) \end{cases}$$

일 때, $\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은?

① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

유형 6 유리식의 연산

출제유형 | 유리식의 성질을 이용하여 주어진 유리식을 간단히 하거나 최댓값, 최솟값을 구하는 문제, 부분분수를 이용하여 간단히 하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 부분분수의 변형

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right) \text{ (단, } A\ne B)$$

(2) 유리식의 계산

다항식 A, B, C에 대하여

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C} \text{ (단, } B\ne 0,\ C\ne 0,\ D\ne 0)$$

필수 유형

분모가 0이 되게 하지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}$$
$$=k\left\{\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

출제 의도

주어진 유리식을 부분분수로 나타내고 간단히 할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}$$
$$=11\left\{\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

따라서 $k=11$

답 11

[참고]

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right) \text{ (단, } a\ne b)$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right) \text{ (단, } a\ne 0)$$

26 6051-0055

$\dfrac{3}{x^2-x-2}+\dfrac{2}{x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x^2+5x+6}$을 간단히 하면?

① $\dfrac{1}{x^2-4}$　② $\dfrac{2}{x^2-4}$　③ $\dfrac{3}{x^2-4}$
④ $\dfrac{4}{x^2-4}$　⑤ $\dfrac{5}{x^2-4}$

27 6051-0056

유리식 $\dfrac{3k^2+4k+1}{k+2}$의 값이 정수가 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

28 6051-0057

$x\neq0$, $x\neq1$, $x\neq-1$, $x\neq2$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}\div\frac{x^2-3x+2}{x^3+1}=px+q+\frac{3}{x+r}$$

이 성립할 때, $p+q+r$의 값은? (단, p, q, r는 상수이다.)

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

유형 7 유리함수

출제유형 | 유리함수의 성질과 그래프를 통하여 점근선, 대칭이 되는 점 또는 직선의 방정식을 구하는 문제 및 유리함수의 합성함수와 역함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

(1) 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) 점 (p, q)에 대하여 대칭이고, 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.
(3) 두 직선 $y=(x-p)+q$, $y=-(x-p)+q$에 대하여 대칭이다.

필수 유형 | 2001학년도 대수능 |

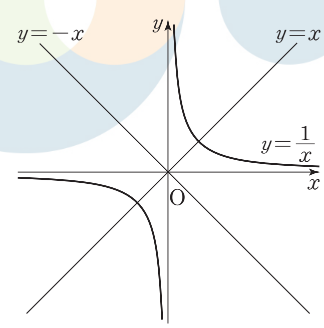
유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프가 직선 $y=ax$에 대하여 대칭이 되는 상수 a의 값을 모두 구하면? [3점]

① $-1,\ 1$　② $-2,\ 2$　③ $-3,\ 3$
④ $-4,\ 4$　⑤ $-5,\ 5$

출제 의도

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프의 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



그림에서 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프는 원점 $(0, 0)$에 대하여 대칭이고, 점근선은 x축, y축이므로 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이 된다.
따라서 $a=1$ 또는 $a=-1$이다.

답 ①

수학Ⅱ

정답과 풀이 14쪽

29

6051-0058

함수 $f_1(x)=\dfrac{x}{x-1}$이고 자연수 n에 대하여 $f_{n+1}(x)=(f_1\circ f_n)(x)$일 때, $f_{2017}(-1)$의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

30

6051-0059

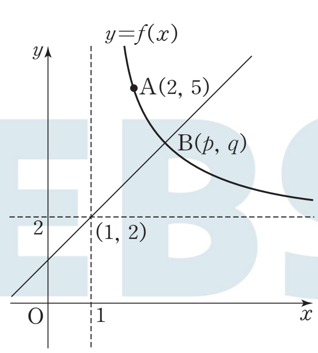
유리함수 $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$에 대하여 $(g\circ f)(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$을 만족시키는 함수 $f(x)$는? (단, $x\neq1$이고 $x\neq-1$이다.)

① $\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ ② x^2+1 ③ $\dfrac{3}{2}(x^2+1)$
④ $2(x^2+1)$ ⑤ $\dfrac{5}{2}(x^2+1)$

31

6051-0060

그림은 두 점근선의 교점의 좌표가 $(1, 2)$이고 점 $\mathrm{A}(2, 5)$를 지나는 함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x-a}$ $(x>1)$의 그래프이다. 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{B}(p, q)$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

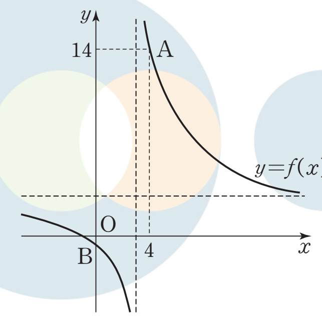


① 3 ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3+\sqrt{3}$
④ $2+2\sqrt{3}$ ⑤ $3+2\sqrt{3}$

32

6051-0061

유리함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x-a}$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(4, 14)$, $\mathrm{B}\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$를 지나고 $f(x)=f^{-1}(x)$가 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

33

6051-0062

유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(2, -3)$을 지난다. 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나는 두 점 사이의 거리를 $l(k)$라 할 때, $l(k)$의 최솟값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

34

6051-0063

두 유리함수 $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$, $g(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$가 $f(g(x))=x+1$을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

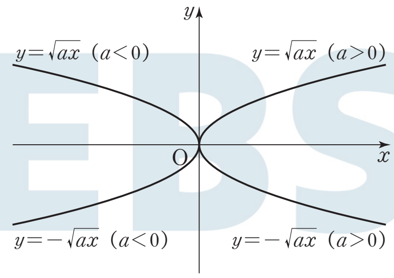
① -7 ② -5 ③ -3
④ -1 ⑤ 1

유형 8 무리식과 무리함수

출제유형 | 무리식을 간단히 하는 문제, 무리함수의 성질과 그래프를 활용하는 문제, 무리함수의 역함수와 합성함수의 활용 문제가 출제된다.

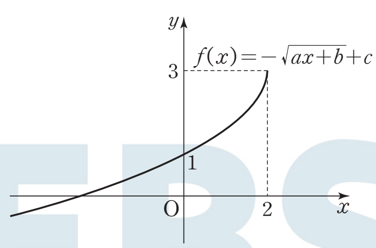
출제유형잡기 | (1) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

(2) 무리함수의 그래프



필수 유형

무리함수 $f(x)=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $f(-6)+f(-1)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① $-\sqrt{6}$　② $-\sqrt{5}$　③ -2
④ $2-\sqrt{6}$　⑤ $2-\sqrt{5}$

출제 의도

주어진 그래프를 보고 무리함수의 식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=-\sqrt{a(x-2)}+3$이다.

이때 $f(0)=1$이므로 $f(0)=-\sqrt{-2a}+3=1$에서 $\sqrt{-2a}=2$

즉, $a=-2$이므로 $f(x)=-\sqrt{-2(x-2)}+3$

따라서 $f(-6)=-\sqrt{(-2)\times(-8)}+3=-4+3=-1$

$f(-1)=-\sqrt{6}+3$이므로

$f(-6)+f(-1)=-1+(-\sqrt{6}+3)$

$=2-\sqrt{6}$

답 ④

35

6051-0064

$0<x<\frac{1}{4}$일 때,

$\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2-1}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2+1}=ax+\frac{1}{bx}$이다.

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

36

6051-0065

무리함수 $f(x)=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프와 곡선 $y=\frac{20}{x}$ $(x>0)$이 만나는 점 A의 x좌표가 5이다. 점 B$(3,\ f(3))$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

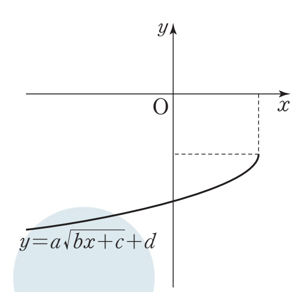
① $-6+3\sqrt{6}$　② $-6+4\sqrt{6}$　③ $-6+5\sqrt{6}$
④ $-6+6\sqrt{6}$　⑤ $-6+7\sqrt{6}$

37

6051-0066

무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프가 그림과 같을 때, 유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$의 그래프가 지나는 모든 사분면은?

(단, a, b, c, d는 상수이다.)



① 제1, 2, 3사분면
② 제1, 2, 4사분면
③ 제1, 3, 4사분면
④ 제2, 3, 4사분면
⑤ 제1, 2, 3, 4사분면

03 수열

1 등차수열

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 $b-a=c-b$이므로 $b=\dfrac{a+c}{2}$인 관계가 성립한다.

참고 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 $a_n=An+B$ (A, B는 상수, $n=1, 2, 3, \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$이고, 공차가 A인 등차수열이다.

2 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

참고 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 대한 이차식 $S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수, $n=1, 2, 3, \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 $2A$인 등차수열이다.

3 등비수열

(1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_1=a$, $a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$인 관계가 성립한다.

4 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

6 합의 기호 $\sum$의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

제n항까지

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

일반항

첫째항부터

7 ∑의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

8 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$

9 여러 가지 수열의 합

(1) 일반항이 분수꼴로 된 수열의 합은 다음과 같이 부분분수로 분해하는 방법, 즉

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (\text{단, } A\neq B)$$

를 이용하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq 0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합으로 나타내어져 있을 때, 다음과 같이 분모를 유리화하는 방법을 이용하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq 0$)

10 수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$에서

(i) 처음 몇 개의 항의 값

(ii) 이웃하는 여러 항 사이의 관계식

으로 정의하는 방법을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

예를 들면 $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$a_2=3a_1=3\times2=6$, $a_3=3a_2=3\times6=18$, $a_4=3a_3=3\times18=54$, $\cdots$

11 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명할 때는 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 자연수 n에 대한 명제가 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

유형 1 등차수열과 등차중항

출제유형 | 등차수열의 일반항 또는 등차중항을 이용하여 첫째항, 공차, 특정한 항을 구하는 문제가 자주 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 등차수열의 일반항 또는 등차중항을 이용하여 첫째항과 공차를 구하거나 특정한 항을 구한다.
등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항이 a, 공차가 d일 때, 다음을 이용한다.
(1) 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n = a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(2) 등차수열의 두 개의 항 a_m, a_n에 대하여
$a_m - a_n = (m-n)d$, $a_m + a_n = 2a+(m+n-2)d$
(3) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면
$b=\dfrac{a+c}{2}$

필수 유형 | 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_3=8$, $a_6-a_4=12$
일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

등차수열의 뜻과 일반항을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_6-a_4=12$에서 $2d=12$이므로
$d=6$
따라서 $a_6=a_3+3d=8+3\times6=26$

답 26

[다른 풀이]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=8$에서 $a+2d=8$ $\cdots\cdots$ ㉠
$a_6-a_4=12$에서
$(a+5d)-(a+3d)=12$
$2d=12$이므로 $d=6$
$d=6$을 ㉠에 대입하면 $a+12=8$이므로 $a=-4$
따라서 $a_6=-4+(6-1)\times6=26$

01 6051-0067

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_8-2a_4+a_2=34$일 때, $a_{10}-a_8$의 값을 구하시오.

02 6051-0068

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1+a_2=10$, $a_3-a_4+a_5=15$
일 때, a_6의 값은?

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

03 6051-0069

공차가 자연수이고
$a_1+a_3+a_5+a_7=0$, $a_{10}\le 33$
을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_8의 최댓값을 구하시오.

04

6051-0070

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_7^{\,2}-a_4^{\,2}=132$$

일 때, a_{10}의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

05

6051-0071

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $\left|\dfrac{a_{10}}{a_6}\right|=1$일 때, $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

06

6051-0072

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4+a_6=6$일 때, $a_1+a_3+a_5+a_7$의 값을 구하시오.

07

6051-0073

등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_2-a_4=-10,\ a_4+a_{12}=20$$

을 만족시킬 때, a_7의 값을 구하시오.

08

6051-0074

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$a_n+b_n=6n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킨다. $a_5-b_5=-10$일 때, b_{10}의 값은?

① 36 ② 37 ③ 38
④ 39 ⑤ 40

09

6051-0075

첫째항이 -20이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 b_1의 최댓값을 구하시오.

(가) 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 정수이고 공차는 -6이다.
(나) $a_nb_n>0$을 만족시키는 n의 값이 3개만 존재한다.

10

6051-0076

두 수 8과 56 사이에 35개의 수를 넣어 만든 수열

$$8,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{35},\ 56$$

이 등차수열을 이룰 때, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{35}$ 중 그 값이 자연수인 것의 합을 구하시오.

정답과 풀이 18쪽

유형 2 등차수열의 합

출제유형 | 등차수열의 연속하는 몇 개의 항의 합을 구하거나 등차수열의 합을 이용하여 공차나 특정한 항을 구하는 문제가 자주 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공차를 구하고 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

필수 유형 | 2015학년도 대수능 9월 모의평가 |

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_{10}=22$일 때, $\sum_{k=2}^{9} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

등차수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_{10}=22$에서 $a_1+(a_1+9d)=2a_1+9d=22$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{9} a_k &= \sum_{k=1}^{9} a_k - a_1\\ &= \frac{9(2a_1+8d)}{2}-a_1\\ &= \frac{8(2a_1+9d)}{2}\\ &= \frac{8\times 22}{2}\\ &=88\end{aligned}$$

답 88

[다른 풀이]

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7=a_5+a_6$

따라서 조건에서 $a_1+a_{10}=22$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{9} a_k &=(a_2+a_9)+(a_3+a_8)+(a_4+a_7)+(a_5+a_6)\\ &=22+22+22+22\\ &=88\end{aligned}$$

11 ▸ 6051-0077

첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제10항까지의 합이 330일 때, a_6의 값은?

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

12 ▸ 6051-0078

2와 3 사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 제$(n+2)$항까지의 합이 25일 때, 2와 3 사이에 $2n$개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 제$(2n+2)$항까지의 합은?

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

13 ▸ 6051-0079

첫째항이 15인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_7=S_9$일 때, S_n의 최댓값은?

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

14 ▸ 6051-0080

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=pn+4$를 만족시킨다.

$$a_4+a_5-a_6+a_7-a_8+a_9-a_{10}=6$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하시오.

(단, p는 상수이다.)

유형 3 등비수열과 등비중항

출제유형 | 등비수열의 일반항 또는 등비중항을 이용하여 첫째항, 공비, 특정한 항을 구하는 문제가 자주 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 등비수열의 일반항 또는 등비중항을 이용하여 첫째항, 공비를 구하거나 특정한 항을 구한다.
등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항이 a, 공비가 r일 때, 다음을 이용한다.
(1) 등비수열의 일반항 a_n은
$a_1=a,\ a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)
(2) 등비수열의 두 개의 항 $a_m,\ a_n$에 대하여
$\frac{a_n}{a_m}=r^{n-m},\ a_m a_n=a^2r^{m+n-2}$
(3) 0이 아닌 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등비수열을 이루면
$b^2=ac$

필수 유형 | 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_9=4$일 때, $a_2a_8+a_4a_6$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

출제 의도

등비수열 $\{a_n\}$의 각 항을 일반항을 이용하여 나타낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_1a_9=4$에서 $a\times ar^8=4$이므로
$a^2r^8=4$
따라서
$$\begin{aligned}a_2a_8+a_4a_6&=ar\times ar^7+ar^3\times ar^5\\&=a^2r^8+a^2r^8\\&=4+4\\&=8\end{aligned}$$

답 ①

[다른 풀이]
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
세 수 $a_1,\ a_5,\ a_9$는 공비가 r^4인 등비수열을 이루므로 조건에서
$a_1a_9={a_5}^2=4$
세 수 $a_2,\ a_5,\ a_8$은 공비가 r^3인 등비수열을 이루므로
$a_2a_8={a_5}^2=4$
세 수 $a_4,\ a_5,\ a_6$은 공비가 r인 등비수열을 이루므로
$a_4a_6={a_5}^2=4$
따라서 $a_2a_8+a_4a_6={a_5}^2+{a_5}^2=4+4=8$

15 6051-0081

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_2=16,\ a_5=2$
일 때, $\frac{10}{a_8}$의 값을 구하시오.

16 6051-0082

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1-a_2=-9,\ a_4-a_5=-72$
일 때, a_3의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

17 6051-0083

모든 항이 자연수이고 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_2a_4=144$
일 때, a_5의 값을 구하시오.

18 6051-0084

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n-a_{n+1}\}$은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열을 이루고 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10}=3^k$이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

19

ⓞ 6051-0085

등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1^2+2a_2^2+a_3^2=25,\ \frac{a_5+a_8}{a_2+a_5}=\frac{1}{8}$$

을 만족시킬 때, $(a_4+a_6)^2$의 값은?

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{25}{64}$　③ $\frac{13}{32}$　④ $\frac{27}{64}$　⑤ $\frac{7}{16}$

20

ⓞ 6051-0086

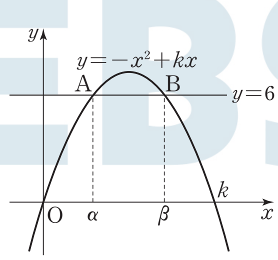
세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루고 세 수 $2c$, a, 4가 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $a+b+c=0$일 때, $c-a$의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

21

ⓞ 6051-0087

그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+kx$의 그래프와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 세 수 $\frac{5}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{5}{\beta^2}$가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha<\beta<k$)



유형 4 등비수열의 합

출제유형 | 등비수열의 연속하는 몇 개의 항의 합을 구하거나 등비수열의 합을 이용하여 공비나 특정한 항을 구하는 문제가 자주 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공비를 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) $r=1$일 때, $S_n=na$

(2) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

필수 유형 | 2012학년도 대수능 9월 모의평가 |

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $\frac{S_4}{S_2}=9$일 때, $\frac{a_4}{a_2}$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 9

출제 의도

등비수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 $S_2=2a$, $S_4=4a$이므로 $\frac{S_4}{S_2}=2$가 되어 조건에 모순이다.

그러므로 $r\neq1$이므로

$$S_2=\frac{a(1-r^2)}{1-r}$$

$$S_4=\frac{a(1-r^4)}{1-r}=\frac{a(1-r^2)(1+r^2)}{1-r}=(1+r^2)S_2$$

이때 $\frac{S_4}{S_2}=\frac{(1+r^2)S_2}{S_2}=1+r^2=9$에서 $r^2=8$

따라서 $\frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=8$

답 ④

[다른 풀이]

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_1+a_2}=1+\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}$$

$$=1+\frac{r^2(a_1+a_2)}{a_1+a_2}=1+r^2=9$$

이므로 $r^2=8$

따라서 $\frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=8$

22

6051-0088

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2^{n-1}+3n$일 때,

$$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{10}$$

의 값은?

① 1176 ② 1180 ③ 1184
④ 1188 ⑤ 1192

23

6051-0089

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_1a_2}{a_4}=\frac{1}{2},\ \frac{a_7-a_3}{a_5-a_1}=4$$

가 성립할 때, 첫째항부터 제9항까지의 합은?

① 1020 ② 1022 ③ 1024
④ 1026 ⑤ 1028

24

6051-0090

모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{20}=3S_{10}$일 때, $\frac{S_{30}}{S_{10}}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

유형 5 수열의 합과 일반항 사이의 관계

출제유형 | 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항을 구하거나 일반항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a_1=S_1$

(2) $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

필수 유형

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$일 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_4}$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

출제 의도

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

수열의 합과 일반항 사이의 관계로부터

$$a_1=S_1=2\left(1-\frac{1}{1+1}\right)=1$$

$$a_4=S_4-S_3=2\left(1-\frac{1}{4+1}\right)-2\left(1-\frac{1}{3+1}\right)$$

$$=2\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)=2\times\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$$

따라서 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_4}=1+10=11$

답 ④

[다른 풀이]

$S_n=\frac{2n}{n+1}$에서

$a_1=S_1=\frac{2\times1}{1+1}=1$ …… ㉠

$n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{(n-1)+1}$$

$$=\frac{2n^2-2(n^2-1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$$ …… ㉡

㉡에 $n=1$을 대입하면

$a_1=\frac{2}{1\times(1+1)}=1$

이므로 ㉠이 성립한다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이므로 $a_4=\frac{2}{4\times5}=\frac{1}{10}$이다.

따라서 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_4}=1+10=11$

수학Ⅱ

25

6051-0091

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=3\times2^n+p$이다. $a_1+a_5=60$일 때, S_p의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

26

6051-0092

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=n^2+pn$이다.

$$2(a_1+a_3+a_5)=a_2+2a_4+a_6-18$$

일 때, p^2의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

27

6051-0093

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때,

$$S_n=n^2+pn,\ T_n=qn^2+n+1$$

이다. $a_4=b_6$, $S_6=T_4$가 성립할 때, $S_{10}+T_{10}$의 값을 구하시오. (단, p, q는 상수이다.)

유형 6 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질

출제유형 | 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이용하여 수열의 합을 구하거나 항을 구하는 계산문제가 많이 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$에서 합의 기호 $\sum$가 포함된 문제는 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\sum$의 뜻

① $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

② $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=\sum_{k=m}^{n}a_k$

③ $\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$ (단, $2\le m\le n$)

(2) $\sum$의 성질

임의의 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

필수 유형 | 2015학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=15$이고,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1\ (n\ge1)$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

$\sum$의 뜻과 성질을 이용하여 일반항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 식을 이용하여 첫째항부터 제$(n-1)$항까지의 합을 구하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=2(n-1)+1\ (n\ge2)$$

$\sum$의 뜻을 이용하여 위의 등식의 좌변을 정리하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$
$$=a_n-a_1$$

따라서

$$a_n=a_1+2(n-1)+1$$
$$=15+2(n-1)+1$$
$$=2n+14\ (n\ge2)$$

이므로

$$a_{10}=2\times10+14=34$$

답 34

28

6051-0094

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=-2$, $a_5=10$일 때, $\sum_{k=6}^{10} a_k$의 값은?

① 92 ② 93 ③ 94 ④ 95 ⑤ 96

29

6051-0095

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_4=6+a_3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_{2k-1}$의 값은?

① 84 ② 85 ③ 86 ④ 87 ⑤ 88

30

6051-0096

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=18,\ a_5=162$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{100} \le 1$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

31

6051-0097

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k=2^n+3$일 때, $\frac{a_9+a_{10}}{a_8}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 6

32

6051-0098

이차함수 $f(x)=-x^2+2ax$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} f(k+2)=\sum_{k=3}^{10} f(k-1)$$

이 성립할 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

33

6051-0099

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10} 2b_k=18$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k-3b_k+4)$의 값은?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

34

6051-0100

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=5,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=0$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

35

6051-0101

첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}a_k+1\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}a_k-1\right)^2$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① 2×3^8 ② 2×3^9 ③ 2×3^{10}
④ 2×3^{11} ⑤ 2×3^{12}

36

6051-0102

-2, 1, 2 중에서 어느 하나의 수를 항의 값으로 갖는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=0,\ \sum_{k=1}^{15}(a_k+2)^2=114$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15}(a_k^3+4)$의 값을 구하시오.

유형 7 자연수의 거듭제곱의 합

출제유형 | 자연수의 거듭제곱의 합에 대하여 Σ의 공식을 활용하는 계산문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수의 거듭제곱의 합에 대하여 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

필수 유형 | 2015학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n\ (n\geq1)$일 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}$의 값은? [3점]

① 2960 ② 3000 ③ 3040
④ 3080 ⑤ 3120

출제 의도

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 일반항을 구하고, Σ의 공식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$으로 놓으면

$S_n=n^2-n$이므로

$a_1=S_1=0$ …… ㉠

$n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}\\&=2n-2\quad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉡에 $n=1$을 대입하면 $a_1=0$이므로 ㉠이 성립한다.

즉, $a_n=2n-2\ (n\geq1)$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}&=\sum_{k=1}^{10}k\{2(4k+1)-2\}\\&=8\sum_{k=1}^{10}k^2\\&=8\times\frac{10(10+1)(2\times10+1)}{6}\\&=3080\end{aligned}$$

답 ④

37

6051-0103

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2$의 값은?

① 220 ② 225 ③ 230
④ 235 ⑤ 240

38

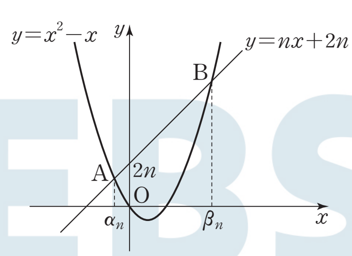
6051-0104

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{5}(\alpha^2+k-1)(\beta^2+k-1)$의 값을 구하시오.

39

6051-0105

그림과 같이 자연수 n에 대하여 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=nx+2n$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(\alpha_k^2+\beta_k^2)$의 값을 구하시오.



유형 8 일반항이 소거되는 꼴로 변형되는 수열의 합

출제유형 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형하여 수열의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형할 때에는 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 수열의 일반항의 분모가 두 식의 곱이면 다음과 같이 유리식을 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 수열의 일반항의 분모가 무리식이면 분모를 유리화하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a-b}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$

(단, $a\neq b$)

필수 유형

$\sum_{k=1}^{15}\frac{k^2+k+p}{k(k+1)}=\frac{75}{4}$일 때, 상수 p의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

출제 의도

Σ를 사용하여 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\sum_{k=1}^{15}\frac{k^2+k+p}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{15}\left\{1+\frac{p}{k(k+1)}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{15}1+\sum_{k=1}^{15}\frac{p}{k(k+1)}$

$=15+p\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=15+p\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$

$=15+p\left(1-\frac{1}{16}\right)$

$=15+\frac{15}{16}p$

따라서 $15+\frac{15}{16}p=\frac{75}{4}$이므로 $p=4$

답 ⑤

수학Ⅱ

정답과 풀이 23쪽

40

6051-0106

$\sum_{k=4}^{n} \frac{10}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=80$일 때, n의 값을 구하시오.

41

6051-0107

첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합이 465일 때,

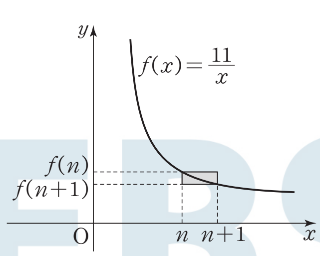
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2}{\sqrt{1+a_k}+\sqrt{1+a_{k+1}}}$$

의 값을 구하시오.

42

6051-0108

자연수 n과 함수 $f(x)=\frac{11}{x}$ $(x>0)$에 대하여 네 직선 $x=n$, $x=n+1$, $y=f(n)$, $y=f(n+1)$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?



① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

유형 9 수열의 귀납적 정의

출제유형 | 첫째항 a_1의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 첫째항 a_1의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식에서 수열의 규칙성을 찾거나 차례대로 몇 개의 항을 나열하여 수열의 규칙성을 찾는다.

수열 $\{a_n\}$에서 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때

(1) 등차수열

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) ⇨ 공차가 d인 등차수열

② $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 또는 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

(2) 등비수열

① $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) ⇨ 공비가 r인 등비수열

② $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 또는 $a_{n+1}^{\ 2}=a_n\times a_{n+2}$

필수 유형

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1a_2=2$
(나) $a_{n+1}^{\ 2}-4a_n^{\ 2}=0$ $(n\geq 1)$

a_9의 값을 구하시오.

출제 의도

이웃하는 항들 사이의 관계식을 이용하여 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (나)에서 $(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+2a_n)=0$이므로

$a_{n+1}=2a_n$ 또는 $a_{n+1}=-2a_n$

이때 $a_n>0$이므로

$a_{n+1}=2a_n$ $(n\geq 1)$

$n=1$일 때 $a_2=2a_1$이므로 이것을 조건 (가)에 대입하면

$2a_1^{\ 2}=2$, $a_1^{\ 2}=1$에서 $a_1=1$ $(a_1>0$이므로$)$

조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2^{n-1}$

따라서 $a_9=2^8=256$

답 256

43 ◦ 6051-0109

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_1=-3$이고 $a_2+a_4=2$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은?

① 60 ② 62 ③ 64
④ 66 ⑤ 68

44 ◦ 6051-0110

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}a_k$의 값을 구하시오.

45 ◦ 6051-0111

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{na_n}{a_n+1}$$

을 만족시킬 때, a_5의 값은?

① $\frac{21}{11}$ ② 2 ③ $\frac{23}{11}$
④ $\frac{24}{11}$ ⑤ $\frac{25}{11}$

46 ◦ 6051-0112

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}+\frac{1}{2a_n-1}=0$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 10 수열의 규칙성을 찾아 일반항 구하기

출제유형 | 좌표평면 위의 점, 도형, 그래프에 대하여 주어진 규칙을 만족시키는 몇 개의 항을 나열하여 항을 추론하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키도록 몇 개의 항을 구하여 규칙성을 찾거나 n번째 항과 $n+1$번째 항 사이의 관계식을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n에 대하여 순서쌍 $(x_n,\ y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$
(나) n이 홀수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1})=(x_n,\ (y_n-3)^2)$이고,
n이 짝수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1})=((x_n-3)^2,\ y_n)$이다.

순서쌍 $(x_{2015},\ y_{2015})$에서 $x_{2015}+y_{2015}$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

좌표평면 위에서 주어진 조건에 따라 나열되는 점의 규칙성을 찾아 특정한 점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서
$(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$
조건 (나)에서
$(x_2,\ y_2)=(x_1,\ (y_1-3)^2)=(1,\ 4)$
$(x_3,\ y_3)=((x_2-3)^2,\ y_2)=(4,\ 4)$
$(x_4,\ y_4)=(x_3,\ (y_3-3)^2)=(4,\ 1)$
$(x_5,\ y_5)=((x_4-3)^2,\ y_4)=(1,\ 1)$
$(x_6,\ y_6)=(x_5,\ (y_5-3)^2)=(1,\ 4)$
⋮
이므로 자연수 k에 대하여
$(x_{4k-3},\ y_{4k-3})=(1,\ 1)$, $(x_{4k-2},\ y_{4k-2})=(1,\ 4)$
$(x_{4k-1},\ y_{4k-1})=(4,\ 4)$, $(x_{4k},\ y_{4k})=(4,\ 1)$
이다.
따라서 $(x_{2015},\ y_{2015})=(x_{4\times504-1},\ y_{4\times504-1})=(4,\ 4)$
이므로 $x_{2015}+y_{2015}=4+4=8$

답 8

수학Ⅱ

47

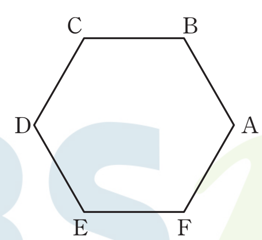
6051-0113

자연수 n에 대하여 3^n+7^n의 일의 자리의 수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k > 150$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

48

6051-0114

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF가 있다. 자연수 n에 대하여 점 P_n은 점 A를 출발하여 정육각형의 변을 따라 다음 규칙에 따라 이동한 점이다.



[규칙 1] 점 P_1은 점 A에서 시계 반대 방향으로 1만큼 이동한 점이다.
[규칙 2] $n\geq 2$인 자연수일 때, 점 P_n은 n이 짝수이면 점 P_{n-1}에서 시계 방향으로 n만큼 이동한 점이고, n이 홀수이면 점 P_{n-1}에서 시계 반대 방향으로 n만큼 이동한 점이다.

예를 들어 점 P_4는 점 E와 같다. 다음 중 점 P_{80}과 같은 점은?

① A ② B ③ C
④ D ⑤ E

49

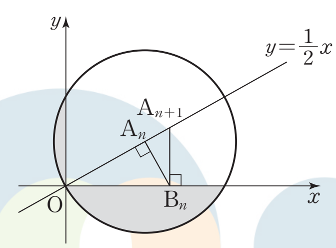
6051-0115

자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$이다.
(나) 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직이고 점 A_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점이 B_n이고, 점 B_n을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점이 A_{n+1}이다.

원점 O에 대하여 점 A_n을 중심으로 하고 선분 OA_n을 반지름으로 하는 원과 원의 내부에서 x축의 아래쪽 영역과 y축의 왼쪽 영역의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $S_5=(a\pi-1)b^8$이다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오.

(단, 영역은 경계선을 포함하고, a, b는 양의 유리수이다.)



유형 11 수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 식이나 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 앞뒤 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 식이나 값을 구한다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 9월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고

$$na_{n+1}-2na_n+\frac{n+2}{n+1}=0\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n=2^n+\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=3$, (우변)$=2^1+\frac{1}{1}=3$이므로
> $(*)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로
> $$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$$
> $$=\boxed{\quad (가) \quad}-\frac{k+2}{k+1}$$
> $$=k2^{k+1}+\boxed{\quad (나) \quad}$$
> 이다. 따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$이므로
> $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n+\frac{1}{n}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3)\times g(4)$의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

출제 의도

주어진 명제를 증명하는 과정에서 수학적 귀납법을 이용하여 빈칸에 들어갈 식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\boxed{k2^{k+1}+2}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$$

따라서 $f(k)=k2^{k+1}+2$, $g(k)=\frac{k}{k+1}$이므로

$f(3)\times g(4)=(3\times 2^4+2)\times\frac{4}{5}=40$

답 ⑤

50

6051-0116

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로
> $(*)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k+1}{(k+2)!}$$
> $$=1-\frac{1}{(k+1)!}+\boxed{\quad (가) \quad}$$
> $$=1-\boxed{\quad (나) \quad}$$
> 따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(4)$의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{60}$ ③ $\frac{1}{92}$
④ $\frac{1}{120}$ ⑤ $\frac{1}{240}$

04 지수와 로그

1 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

실수 a와 2 이상의 정수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$의 근 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

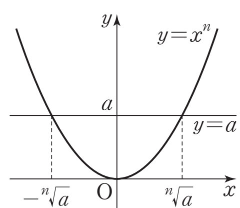
(2) 실수인 거듭제곱근

a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 할 때

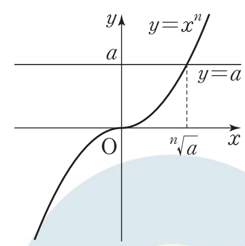
① n이 짝수이면 $a\ge 0$일 때에만 실수 x가 존재한다. 특히 $a>0$이면 $x=\pm\sqrt[n]{a}$이고 $a=0$이면 $x=0$이다.

② n이 홀수이면 a의 값에 관계없이 실수 x는 항상 존재하고 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

참고 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 근 중에서 실수인 서로 다른 근의 개수이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.



⟨n이 짝수⟩



⟨n이 홀수⟩

2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$ ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

3 지수의 확장(1) – 정수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\ne 0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^0=1$ ② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\ne 0$, $b\ne 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^ma^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^nb^n$

4 지수의 확장(2) – 유리수

(1) 유리수인 지수

$a>0$, m이 정수, n이 2 이상의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때

① $a^ma^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^nb^n$

5 지수의 확장(3) – 실수

(1) 무리수인 지수

예를 들어 무리수 $\sqrt{2}=1.4142135\cdots$에 대하여 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots$를 지수로 가지는 수 $3^{1},\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ \cdots$이 가까워지는 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0,\ b>0$이고 $x,\ y$가 실수일 때

① $a^{x}a^{y}=a^{x+y}$

② $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

③ $(ab)^{x}=a^{x}b^{x}$

④ $a^{x}\div a^{y}=a^{x-y}$

6 로그의 정의

(1) $a>0,\ a\neq1,\ N>0$일 때, $a^{x}=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나만 존재함이 알려져 있다.

이때 x를 $x=\log_{a}N$으로 나타내고, x를 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다. 즉,

$$a>0,\ a\neq1,\ N>0\text{일 때,}\quad a^{x}=N \iff x=\log_{a}N$$

(2) $\log_{a}N$이 정의될 조건

① 밑의 조건 : $a>0,\ a\neq1$

② 진수의 조건 : $N>0$

7 로그의 성질

(1) 로그의 기본 성질

$a>0,\ a\neq1$이고 $x>0,\ y>0$일 때

① $\log_{a}a=1,\ \log_{a}1=0$

② $\log_{a}xy=\log_{a}x+\log_{a}y$

③ $\log_{a}\dfrac{x}{y}=\log_{a}x-\log_{a}y$

④ $\log_{a}x^{n}=n\log_{a}x$ (단, n은 실수)

(2) 로그의 밑의 변환 공식

$a>0,\ a\neq1$이고 $b>0$일 때

① $\log_{a}b=\dfrac{\log_{c}b}{\log_{c}a}$ (단, $c>0,\ c\neq1$)

② $\log_{a}b=\dfrac{1}{\log_{b}a}$ (단, $b\neq1$)

③ $\log_{a}b\times\log_{b}a=1,\ \log_{a}b\times\log_{b}c=\log_{a}c$ (단, $b\neq1,\ c>0$)

참고 로그의 여러 가지 성질

$a>0,\ a\neq1$이고 $b>0$일 때

① $a^{\log_{a}b}=b$

② $a^{\log_{b}c}=c^{\log_{b}a}$ (단, $b\neq1,\ c>0$)

③ $\log_{a^{m}}b^{n}=\dfrac{n}{m}\log_{a}b$ (단, $m,\ n$은 실수, $m\neq0$)

8 상용로그

(1) **상용로그** : 양수 A에 대하여 $\log_{10}A$와 같이 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log A$로 나타낸다.

(2) **상용로그표** : 상용로그표는 1.00부터 9.99까지의 0.01 간격의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

참고 $\log 3.45$의 값을 구하려면 상용로그표에서 3.4의 가로줄과 5의 세로줄이 만나는 곳의 수 .5378을 찾으면 된다.

즉, $\log 3.45=0.5378$

수	…	5	…
⋮			
3.4		.5378	
⋮			

정답과 풀이 26쪽

유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) a가 실수이고, n이 2 이상의 자연수일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근과 서로 같다.

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

필수 유형 | 2013학년도 대수능 9월 모의평가 |

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

출제 의도

거듭제곱근의 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\sqrt{2^3\times(\sqrt[3]{4})^3}=\sqrt{8\times4}=\sqrt{32}$$

이때 $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

답 ②

01 6051-0117

2 이상의 자연수 n에 대하여 $3^{24}\times12^{12}$의 n제곱근 중에서 양수인 것이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 18

02 6051-0118

2 이상의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{-8}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=2}^{20}ka_k$의 값을 구하시오.

03 6051-0119

2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^n\ (x>0)$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표를 α_n, 곡선 $y=x^{n+1}\ (x>0)$과 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 β_n이라 하자. $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$이 1보다 큰 어떤 수의 $n(n+1)$제곱근과 같아지도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

04 6051-0120

실수 a가 $\sqrt{2}$의 세제곱근일 때, $a\times\sqrt[3]{4}$는 어떤 자연수 N의 여섯제곱근이다. N의 값을 구하시오.

정답과 풀이 26쪽

유형 2 지수의 확장과 지수법칙

출제유형 | 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타내는 문제 또는 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(3) 지수법칙

$a>0,\ b>0$이고 $x,\ y$가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

필수 유형

$\sqrt[3]{64}+9^{\frac{3}{2}}$의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

출제 의도

지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{64}+9^{\frac{3}{2}}&=\sqrt[3]{2^6}+(3^2)^{\frac{3}{2}}\\&=2^{\frac{6}{3}}+3^{2\times\frac{3}{2}}\\&=2^2+3^3\\&=4+27\\&=31\end{aligned}$$

답 ④

05 6051-0121

$4^{-\frac{3}{2}}\times8^{\frac{5}{3}}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

06 6051-0122

$(2^{-3}+3^{-2})\times72$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 13
④ 17 ⑤ 25

07 6051-0123

$(3\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{4})^3$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

08 6051-0124

두 자연수 $m,\ n$과 1이 아닌 양의 실수 a에 대하여

$\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}}{(\sqrt[m]{a})^n}=1$이 성립할 때, $m+n$의 최솟값을 구하시오.

(단, $m\geq2$)

09

6051-0125

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a=\sqrt[n]{3}$일 때, $\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{5}{6}$

10

6051-0126

$2^x=(\sqrt{5})^y=3^{-z}$을 만족시키는 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $2yz=y+2z$가 성립할 때, 4^{x+1}의 값은?

① 6　② $\frac{20}{3}$　③ $\frac{22}{3}$　④ 8　⑤ $\frac{26}{3}$

11

6051-0127

두 실수 x, y에 대하여 $3\times2^{x+1}-5\times2^x=10$, $4^y-2\times4^{y-1}=1$일 때, 4^{x-y}의 값을 구하시오.

12

6051-0128

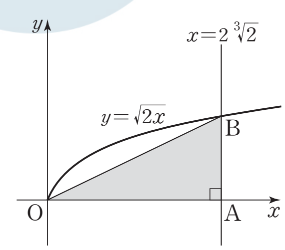
$a^4=3$, $b^6=5$를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $(a^m+b^{2n})^2-(a^m-b^{2n})^2$이 자연수가 되도록 하는 20 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 22　② 24　③ 26　④ 28　⑤ 30

13

6051-0129

그림과 같이 직선 $x=2\sqrt[3]{2}$가 x축 및 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



유형 3 로그의 뜻과 성질

출제유형 | 로그의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리하거나 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

$a^x=b \Longleftrightarrow x=\log_a b$

(2) $\log_a b$가 정의될 조건은 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$이다.

(3) 로그의 성질

① $a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $y>0$일 때

$\log_a a=1$, $\log_a 1=0$

$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

$\log_{a^q} x^p=\frac{p}{q}\log_a x$ (단, p는 실수, q는 0이 아닌 실수)

② $a>0$, $a\neq1$이고 $b>0$일 때

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

$\log_a b\times\log_b a=1$ (단, $b\neq1$)

$\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

필수 유형

$\log_2 10+\log_2\frac{4}{5}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}\log_2 10+\log_2\frac{4}{5}&=\log_2\left(10\times\frac{4}{5}\right)\\&=\log_2 8\\&=\log_2 2^3\\&=3\log_2 2=3\end{aligned}$$

답 ③

14 6051-0130

$\log_{x-1} x(n-x)$의 값이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합이 207일 때, 자연수 n의 값은?

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

15 6051-0131

$\log_2\left(\sqrt[3]{32}\times4^{-\frac{1}{3}}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

16 6051-0132

$\log_2 12-4\log_4\sqrt{3}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

17 6051-0133

$\log_{\sqrt{3}} x=2$, $\log_3 xy=5$일 때, $3^{\frac{1}{2}\log_x y}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

18

6051-0134

$\log_3 \sqrt{30} = A$, $\log_3 \frac{6}{25} = B$일 때, $\log_3 60$을 A, B로 나타낸 것은?

① $\frac{5A-2B}{3}$ ② $\frac{5A+B}{3}$

③ $\frac{10A-2B-1}{3}$ ④ $\frac{10A+2B-2}{3}$

⑤ $\frac{10A+B-3}{3}$

19

6051-0135

1이 아닌 양수 x에 대하여 $\frac{3}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_a x}$을 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $a>0$, $a \neq 1$)

① 66 ② 68 ③ 70

④ 72 ⑤ 74

20

6051-0136

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $\sqrt[5]{a} = \sqrt[3]{b}$, $\sqrt[5]{b} = \sqrt{c}$가 성립할 때, $12\log_c a$의 값을 구하시오.

21

6051-0137

이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$$\log_{6\alpha\beta} 2\alpha(\alpha+1) + \log_{6\alpha\beta} 2\beta(\beta+1)$$

의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

유형 4 상용로그와 그 활용

출제유형 | 상용로그의 뜻을 이용하여 주어진 식의 값을 구하거나 상용로그를 포함하는 실생활 문제에서 상수 또는 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구하거나 조건에서 주어진 값을 실생활과 관련된 식에 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 식을 계산하거나 간단히 한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

디지털 사진을 압축할 때 원본 사진과 압축한 사진의 다른 정도를 나타내는 지표인 최대 신호 대 잡음비를 P, 원본 사진과 압축한 사진의 평균제곱오차를 E라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P = 20\log 255 - 10\log E \ (E>0)$$

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비를 각각 P_{A}, P_{B}라 하고, 평균제곱오차를 각각 E_{A} $(E_{\text{A}}>0)$, E_{B} $(E_{\text{B}}>0)$이라 하자. $E_{\text{B}} = 100E_{\text{A}}$일 때, $P_{\text{A}} - P_{\text{B}}$의 값은? [3점]

① 30 ② 25 ③ 20

④ 15 ⑤ 10

출제 의도

조건에서 주어진 값을 주어진 식에 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

최대 신호 대 잡음비가 P_{A}일 때 평균제곱오차가 E_{A}이므로

$P_{\text{A}} = 20\log 255 - 10\log E_{\text{A}}$ ⋯⋯ ㉠

최대 신호 대 잡음비가 P_{B}일 때 평균제곱오차가 E_{B}이므로

$P_{\text{B}} = 20\log 255 - 10\log E_{\text{B}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면

$$\begin{aligned} P_{\text{A}} - P_{\text{B}} &= -10\log E_{\text{A}} + 10\log E_{\text{B}} \\ &= 10(\log E_{\text{B}} - \log E_{\text{A}}) \\ &= 10\log \frac{E_{\text{B}}}{E_{\text{A}}} \\ &= 10\log \frac{100E_{\text{A}}}{E_{\text{A}}} \\ &= 10\log 100 \\ &= 10 \times 2 = 20 \end{aligned}$$

답 ③

22

6051-0138

$\log 8.71 = 0.94$로 계산할 때, $\log 8710 + \log 0.871$의 값은?

① 3.80 ② 3.82 ③ 3.84
④ 3.86 ⑤ 3.88

23

6051-0139

은행에 원금 A를 연이율 $r\%$에 1년마다의 복리로 계산하여 n년 동안 예금하였을 때, n년 후에 은행으로부터 받아야 할 원금과 이자의 합계는 다음과 같이 계산한다.

$$A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

은행에 원금 100만 원을 연이율 5%에 1년마다의 복리로 계산하여 10년 동안 예금하였을 때, 10년 후에 은행으로부터 받아야 할 원금과 이자의 합계는 k만 원이다. $\log k$의 값은?

(단, $\log 1.05 = 0.0212$로 계산한다.)

① 2.112 ② 2.212 ③ 2.312
④ 2.422 ⑤ 2.432

24

6051-0140

어느 벤처기업의 10년 전의 매출은 A원이었는데, 그 후 5년 동안은 매출이 매년 전년도에 비하여 10%씩 감소하고, 그 다음 5년 동안은 매출이 매년 전년도에 비하여 10%씩 증가하여 현재의 매출은 kA원이 되었다고 한다. $\log k$의 값은?

(단, $\log 9.9 = 0.996$으로 계산한다.)

① -0.035 ② -0.03 ③ -0.025
④ -0.02 ⑤ -0.015

25

6051-0141

국제민간항공기구(ICAO)에서는 항공기 소음의 평가 단위로 웨클(WECPNL)(dB)을 사용한다.
1일 동안 항공기의 등가 통과횟수가 N이고, 항공기가 통과할 때마다 측정된 소음도 최고치의 평균값이 L(dB)일 때, 항공기 소음의 평가 단위인 웨클 W(dB)의 값은 다음과 같이 계산한다고 한다.

$W = L + 10\log N - k$ (단, k는 상수)

어제 하루 동안 항공기의 등가 통과횟수가 500이고, 항공기가 통과할 때마다 측정된 소음도 최고치의 평균값이 101(dB)일 때, 항공기 소음의 평가 단위인 웨클의 값은 100(dB)이었다. 오늘 하루 동안 항공기의 등가 통과횟수가 631이고 항공기가 통과할 때마다 측정된 소음도 최고치의 평균값이 102(dB)이었을 때, 항공기 소음의 평가 단위인 웨클의 값은?

(단, $\log 5.00 = 0.7$, $\log 6.31 = 0.8$로 계산한다.)

① 100 dB ② 101 dB ③ 102 dB
④ 103 dB ⑤ 104 dB

05 수열의 극한

1 수열의 수렴과 발산

(1) 수렴 : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (단, α는 상수)

(2) 발산 : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty & \text{(양의 무한대로 발산)} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty & \text{(음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} \end{cases}$

2 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

3 수열의 극한값의 계산

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한

① 무리식은 유리화를 이용하여 식을 변형한 후 그 극한값을 구한다.

② 다항식은 최고차항으로 묶는다.

4 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

5 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

(1) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

6 급수

(1) 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 급수라 하고, 이를 합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 이 급수의 제$n$항까지의 부분합이라고 한다.

7 급수의 수렴, 발산

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 하고, S를 급수의 합이라고 한다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

(2) 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다고 한다.

8 급수와 수열의 극한 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

9 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고 그 합이 각각 S, T일 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S+T$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S-T$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty} a_n=kS$ (단, k는 상수)

10 등비급수

(1) 첫째항이 a $(a\neq 0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항의 합으로 이루어진 등비급수는 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a\neq 0)$은

① $|r|<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq 1$일 때 발산한다.

05 수열의 극한

유형 1 수열의 극한

출제유형 | 다양한 형태의 일반항을 갖는 수열의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한

① 무리식은 유리화를 이용하여 식을 변형한 후 그 극한값을 구한다.

② 다항식은 최고차항으로 묶는다.

필수 유형

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn}-2n)=2$가 성립하도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

출제 의도

수열의 극한값이 존재할 조건을 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn}-2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+bn}-2n)(\sqrt{an^2+bn}+2n)}{\sqrt{an^2+bn}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-4)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+2n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 수렴하기 위해서는

$a-4=0$이어야 하므로 $a=4$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-4)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn}{\sqrt{4n^2+bn}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2}$$
$$=\frac{b}{2+2}$$
$$=\frac{b}{4}=2$$

즉, $b=8$이므로 $a+b=4+8=12$

답 ②

01

6051-0142

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{(n+1)(2n-1)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02

6051-0143

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n=2n^2+n$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

03

6051-0144

자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (x, y)의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x, y는 정수이다.

(나) $0\le x\le n$, $0\le y\le x$

예를 들면 $a_1=3$, $a_2=6$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

유형 2 수열의 극한에 대한 기본 성질

출제유형 | 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

③ $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

④ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

(2) $f(n)\times a_n$꼴인 수열의 극한은 $f(n)\times a_n$을 수렴하는 두 수열의 곱의 꼴로 변형하거나 치환한 후 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

필수 유형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n)a_n=4,\ \lim_{n\to\infty}(n+1)b_n=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{b_n}$의 값을 구하시오. (단, $b_n\neq0$)

출제 의도

수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)a_n}{(n+1)b_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)a_n}{(n+1)b_n}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(n^2+n)a_n}{\lim_{n\to\infty}(n+1)b_n}$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

답 2

04 6051-0145

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=10,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

05 6051-0146

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}a_n(a_n-b_n)=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)(a_n-b_n)$의 값은? (단, $a_n\neq0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06 6051-0147

수열 $\{a_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n}{2n}=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+a_n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

유형 3 수열의 극한의 대소 관계

출제유형 | 수열의 일반항에 대한 부등식이 주어졌을 때, 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열의 일반항 a_n이 존재하는 범위가 주어지거나 그 범위를 구할 수 있을 때는 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$의 각 변을 n^2으로 나누면

$$3+\frac{2}{n}<\frac{a_n}{n^2}<3+\frac{3}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3$, $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{5\times3}{1+0}=15$

답 15

07

6051-0148

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{n}}<\frac{a_n}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,a_n}{2\sqrt{n}+1}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

08

6051-0149

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$n(n-1)<(n^2+1)a_nb_n<n(n+1)$$

이 성립한다.

$\lim_{n\to\infty}(a_n^3+b_n^3)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

09

6051-0150

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n\sqrt{n+1}-1<\sqrt{n}\,a_n<(n+1)\sqrt{n}+1$

(나) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)a_n+3nb_n}{(n+1)a_n+nb_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 4 등비수열의 극한

출제유형 | 등비수열의 일반항을 포함하는 수열의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

③ $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

④ $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

(2) 수열 $\left\{\dfrac{c^n+a^n}{a^n+b^n}\right\}$과 같이 분모, 분자에 모두 등비수열의 일반항을 포함하는 수열의 극한값을 구할 때는 $|a|$, $|b|$ 중에서 큰 값을 갖는 항으로 분자와 분모를 나눈 후 $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$$

를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

출제 의도

등비수열의 합 공식과 수열의 극한값을 이용하여 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{a_1}{2}(3^n-1)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{2}(3^n-1)}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{a_1}{2}(1-0)=\frac{a_1}{2}$$

따라서 $\dfrac{a_1}{2}=5$에서 $a_1=10$

답 ②

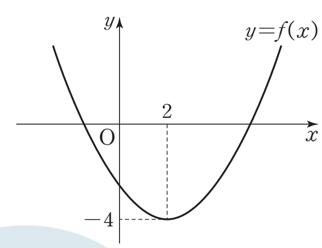
10
6051-0151

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+2^{2n+1}}{3^{n+1}-2^{2n-1}}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

11
6051-0152

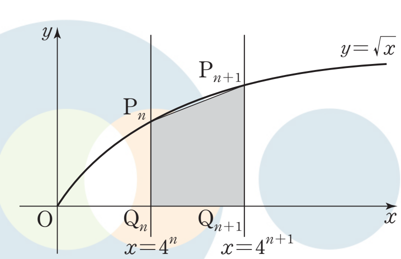
최고차항의 계수가 양수이고 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -4)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



공비가 정수인 등비수열 $\{\{f(x)\}^n\}$이 수렴하도록 하는 모든 x의 값의 합을 구하시오.

12
6051-0153

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 및 x축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 사각형 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+6^n}{S_{n+1}-6^n}$의 값은?



① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{7}$ ③ $\dfrac{1}{8}$
④ $\dfrac{1}{9}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

유형 5 급수

출제유형 | 급수의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 하고, S를 급수의 합이라고 한다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

출제 의도

등차수열의 일반항을 구한 후 급수의 부분합의 극한값을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=(a_1+3d)-(a_1+d)=2d=4$

이므로 $d=2$

이때 $a_1=4$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times 2=2n+2$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{na_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 ①

13 ○ 6051-0154

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{S_nS_{n+2}}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{5}{6}$

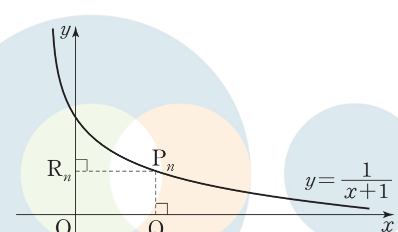
14 ○ 6051-0155

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=2^{n+1}-2$이다. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

15 ○ 6051-0156

자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{x+1}$ $(x>-1)$ 위의 점 $\mathrm{P}_n\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 할 때, 사각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} (S_{n+1}-S_n)$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

유형 6 급수와 수열의 극한 사이의 관계

출제유형 | 급수가 수렴할 때 일반항을 포함하는 수열의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

필수 유형

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

출제 의도

급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}=0$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{n}{a_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}\\ &=0\times 0=0\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=1$$

답 ②

16 6051-0157

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1} a_k}{a_n+\sum_{k=1}^{n} a_k}$의 값은?

$\left(\text{단, } a_n+\sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0\right)$

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

17 6051-0158

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n-2n-1}{2n+1}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

18 6051-0159

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다. (단, $a_n\neq 0$)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-n)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 7 등비급수

출제유형 | 등비수열의 첫째항과 공비를 구하고 이를 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\,(a\neq 0)$은 $|r|<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [3점]

① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{83}{8}$ ③ $\frac{85}{8}$
④ $\frac{87}{8}$ ⑤ $\frac{89}{8}$

출제 의도

등비수열의 첫째항과 공비를 구하고 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$

따라서 수열 $\{(a_n)^2\}$은 첫째항이 $(a_1)^2=9$, 공비가 $r^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{\frac{8}{9}}=\frac{81}{8}$$

답 ①

19

6051-0160

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1+a_4=28$, $a_2+a_5=84$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+3}}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{20}$
④ $\frac{1}{25}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

20

6051-0161

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{8}\right)^{n-1}$은 수렴하고 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(r-2)^n$은 발산하도록 하는 모든 자연수 r의 값의 합은?

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

21

6051-0162

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\,(n\geq 1)$

(나) 유리함수 $y=\frac{a_na_{n+2}x-2a_na_{n+2}+2}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=b_n$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 8 등비급수의 활용

출제유형 | 일정한 규칙에 의하여 무한히 그려지는 도형에서 길이의 합, 넓이의 합을 등비급수를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

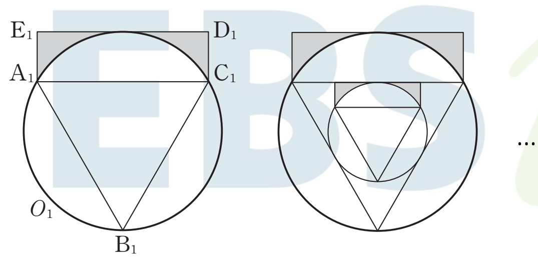
출제유형잡기 | 도형이 그려지는 규칙으로부터 첫째항 a와 공비 r $(0<r<1)$을 구한 후 등비급수의 합 $\frac{a}{1-r}$를 이용한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 …

① $4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ② $4\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$
④ $5\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ⑤ $5\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

출제 의도

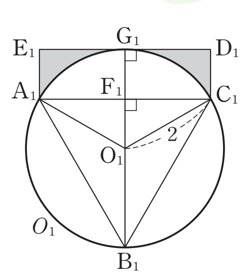
반복되는 도형의 넓이에 대한 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

원 O_1의 중심을 O_1, 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이를 a라 하면 점 O_1은 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{O_1B_1}}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=2$

따라서 $a=2\sqrt{3}$이고 직선 $\mathrm{B_1O_1}$이 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{D_1E_1}$과 만나는 점을 각각 F_1, G_1이라 하면



$\overline{\mathrm{O_1F_1}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\overline{\mathrm{F_1G_1}}=\overline{\mathrm{O_1G_1}}-\overline{\mathrm{O_1F_1}}=2-1=1$

이므로

$S_1=2\sqrt{3}\times1-\left(\pi\times2^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1\right)$

$=2\sqrt{3}-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 r라 하면 두 점 O_1, O_2가 일치하므로

$r=\overline{\mathrm{O_1F_1}}=1$

따라서 두 원 O_1, O_2의 닮음비는 $2:1$이다.

그림 R_n에서 처음으로 색칠된 도형을 T_n이라 하면 두 도형 T_1, T_2의 넓이의 비는 $4:1$이므로 같은 방법으로 두 도형 T_n, T_{n+1} $(n\geq1)$의 넓이의 비도 $4:1$이다.

즉, $S_2=S_1+\frac{1}{4}S_1$, $S_3=S_1+\frac{1}{4}S_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2S_1$, …이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=S_1+\frac{1}{4}S_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2S_1+\left(\frac{1}{4}\right)^3S_1+\cdots=\frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}S_1$

$=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$

답 ①

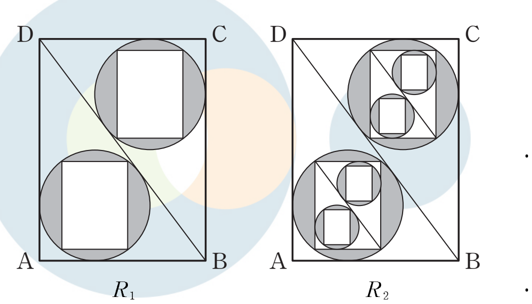
22

6051-0163

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=4$인 직사각형 ABCD에 대하여 두 삼각형 ABD, BCD에 각각 내접하는 원을 그린 후 그 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형을 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형에 그림 R_1과 같은 방법으로 내접하는 원과 직사각형을 그린 후 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? (단, 그림 R_n의 모든 직사각형들은 대각선 중 하나가 직선 BD와 평행하다.)



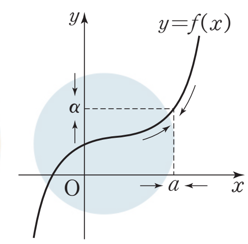
R_1 R_2 …

① $\frac{49\pi-92}{16}$ ② $\frac{49\pi-93}{16}$ ③ $\frac{50\pi-94}{17}$
④ $\frac{50\pi-95}{17}$ ⑤ $\frac{50\pi-96}{17}$

미적분 I

06 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한



(1) 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ 또는 $x \longrightarrow a$일 때, $f(x) \longrightarrow \alpha$와 같이 나타낸다.

이때 α를 $x \longrightarrow a$일 때 함수 $f(x)$의 극한 또는 극한값이라고 한다.

(2) 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때

① $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ 또는 $x \longrightarrow a$일 때, $f(x) \longrightarrow \infty$와 같이 나타낸다.

② $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ 또는 $x \longrightarrow a$일 때, $f(x) \longrightarrow -\infty$와 같이 나타낸다.

2 좌극한과 우극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 $f(x)$의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로

$\lim_{x \to a-} f(x) = \alpha$ 또는 $x \longrightarrow a-$ 일 때, $f(x) \longrightarrow \alpha$와 같이 나타낸다.

(2) 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 $f(x)$의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로

$\lim_{x \to a+} f(x) = \beta$ 또는 $x \longrightarrow a+$ 일 때, $f(x) \longrightarrow \beta$와 같이 나타낸다.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같으면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. 또한 그 역도 성립한다. 즉, $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \alpha$ (단, α는 실수)

3 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} kf(x) = k\lim_{x \to a} f(x) = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha+\beta$

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha-\beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$)

4 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

참고 위의 (1), (2)의 가정의 부등식에서 등호가 없는 경우에도 결론은 성립한다. 즉,

(1) $f(x) < g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) $f(x) < h(x) < g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

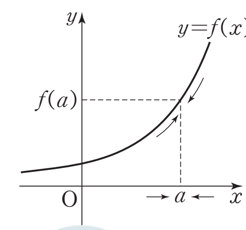
5 함수의 연속

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다. 즉, 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$



(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다. 즉, 위의 세 조건 중에서 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

6 연속함수

(1) 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 실수의 집합

$\{x|a\le x\le b\}$, $\{x|a\le x<b\}$, $\{x|a<x\le b\}$, $\{x|a<x<b\}$

를 구간이라고 하며, 이를 기호로 각각 $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)와 같이 나타낸다. 이때 $[a, b]$를 닫힌 구간, (a, b)를 열린 구간, $[a, b)$와 $(a, b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에 속하는 모든 실수에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다. 특히 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 열린 구간 (a, b)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$ (단, $f(a)$, $f(b)$는 실수)

7 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면 다음 함수도 그 구간에서 연속이다.

(1) $kf(x)$ (단, k는 상수)

(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0$)

8 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

참고 ① 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 연속이더라도 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수 있다.

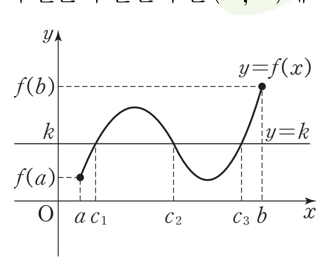
② 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속함수가 아니면 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수 있다.

9 사이값 정리

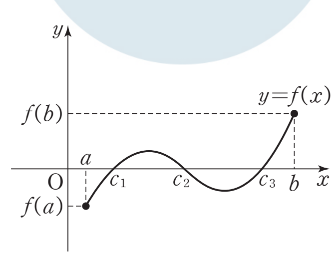
(1) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. [그림 1]

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. [그림 2]



[그림 1]



[그림 2]

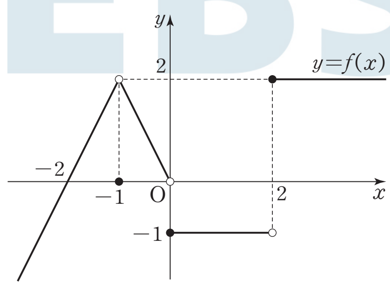
유형 1 좌극한과 우극한

출제유형 | 좌극한과 우극한을 각각 구하거나 이를 비교하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프가 주어진 함수, 절댓값이 포함된 함수, 범위에 따라 다르게 정의된 함수 등에서 좌극한과 우극한을 각각 구한다.

필수 유형

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to -1} f(x)+f(0)+\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

출제 의도

주어진 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)=2,\ f(0)=-1,\ \lim\limits_{x \to 2+} f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)+f(0)+\lim\limits_{x \to 2+} f(x)=2+(-1)+2=3$

답 ③

01 6051-0164

$\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{|x|^3-1}{x-1}+\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

02 6051-0165

함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+2a & (x<1) \\ x^2+ax+2 & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여

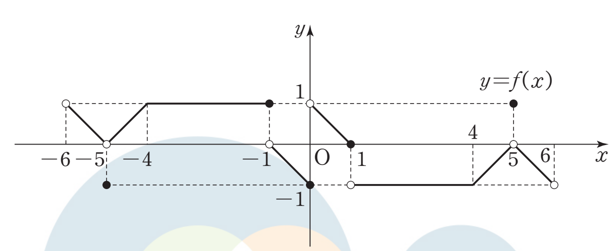
$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재할 때, $f(-1)+f(2)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

03 6051-0166

정의역이 $\{x \mid -6<x<6\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$-6<n<6$인 정수 n에 대하여 $\lim\limits_{x \to n} |f(x)|$의 값이 존재하도록 하는 모든 n의 개수는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

유형 2 함수의 극한값의 계산

출제유형 | 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수의 실수배와 두 함수의 합, 차, 곱, 몫에 대한 극한의 성질을 이용한다.

(2) a에 가까운 모든 x에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ (α는 실수)이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$임을 이용한다.

(3) $\frac{0}{0}$꼴의 극한값은 분자와 분모를 인수분해한 후 약분하여 구한다.

(4) $\infty - \infty$꼴의 무리식의 극한값은 유리화를 이용하여 변형한 다음 구한다.

(5) $0 \times \infty$꼴의 극한값은 식을 적당히 변형하여 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times c$, $\frac{c}{\infty}$ (c는 상수)꼴로 만들어 구한다.

(6) $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 각각 나눈 다음 구한다.

필수 유형

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+6x-16}{x-2}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

$\frac{0}{0}$꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+6x-16}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+8)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+8) = 10$$

답 ⑤

04

6051-0167

두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x+1$에 대하여
$\lim_{x \to \infty} x\{(f \circ g)(x^2)-(g \circ f)(x^2)+1\}$의 값은? (단, $x>0$)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

05

6051-0168

$\lim_{x \to \infty}(x-1)\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06

6051-0169

함수 $f(x)$가 1보다 큰 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x-1} < \frac{1}{2}(x+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)}{x^3-1}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

유형 3 미정계수의 결정

출제유형 | 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때, 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $f(x)$, $g(x)$가 다항함수일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$가 0이 아닌 값으로 수렴하면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

임을 이용하여 미정계수를 결정한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$

(나) $\lim_{x\to0}f(x)=-7$

출제 의도

함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때, 함수를 정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 극한값이 존재하므로

$f(x)=x^3+6x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

또한 조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=-7$이므로

$a=-7$

따라서 $f(x)=x^3+6x-7$이므로

$f(2)=2^3+6\times2-7=13$

답 13

07

6051-0170

두 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-b}{x-a}=b$$

일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

08

6051-0171

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=\frac{1}{4}$이 성립할 때, $\lim_{x\to2}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x+a}-a}$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

09

6051-0172

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=4$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 -3일 때, $f(1)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

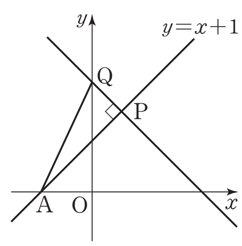
유형 4 함수의 극한의 활용

출제유형 | 그래프에 나타난 길이나 넓이 또는 좌표를 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 극한값을 구하려고 하는 식에 포함된 선분의 길이 또는 도형의 넓이를 한 문자에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 |

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 $\mathrm{P}(t, t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]



① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

출제 의도

점 P의 좌표를 이용하여 선분의 길이를 t에 대한 함수로 나타내고 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

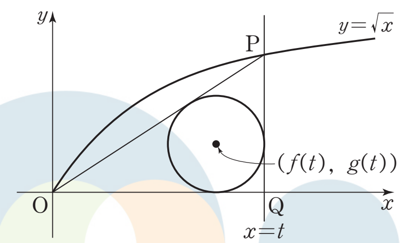
직선 $y=x+1$과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로
점 $\mathrm{P}(t, t+1)$을 지나는 직선 PQ의 방정식은
$y=-(x-t)+(t+1)=-x+2t+1$
이때 직선 PQ가 y축과 만나는 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는
$(0, 2t+1)$
즉, $\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$
$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$
따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

답 ③

10 　6051-0173

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축이 직선 $x=t\ (t>0)$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

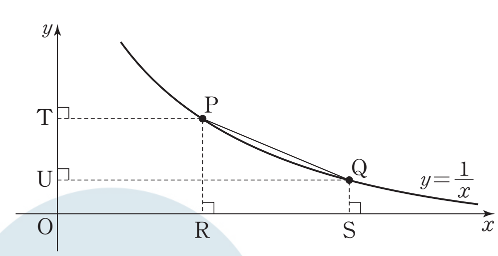


삼각형 POQ에 내접하는 원의 중심의 좌표가 $(f(t), g(t))$일 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{g(t)}{f(t)}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

11 　6051-0174

그림과 같이 $t>1$일 때, 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(t, \frac{1}{t}\right)$에 대하여 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S, y축에 내린 수선의 발을 각각 T, U라 하자.



사각형 PRSQ의 넓이를 $S_1(t)$, 사각형 PTUQ의 넓이를 $S_2(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S_1(t)\times S_2(t)}{t}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

유형 5 함수의 연속

출제유형 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 조건을 이용하여 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는 $f(a)$, $\lim_{x\to a} f(x)$가 모두 존재하고 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$이어야 한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+10 & (x<1) \\ x+a & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 미정계수를 결정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

이 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x+10)=12$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x+a)=1+a$

$f(1)=1+a$

이므로 $12=1+a$

따라서 $a=11$

답 11

정답과 풀이 36쪽

12 ○ 6051-0175

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & (x\neq 3) \\ a & (x=3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13 ○ 6051-0176

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$

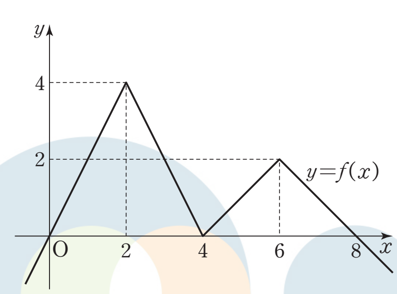
(나) $f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ x^2+ax+b & (1\le x\le 3) \end{cases}$ (단, a, b는 상수이다.)

$f(5)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

14 ○ 6051-0177

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x<2) \\ -2x+8 & (2\le x<4) \\ x-4 & (4\le x<6) \\ -x+8 & (x\ge 6) \end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.



자연수 n에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x-n) & (x<a) \\ f(x) & (x\ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

유형 6 연속함수의 성질

출제유형 | 함수들의 합, 차 또는 곱의 연속성을 묻는 문제가 출제된다.
출제유형잡기 | 구간별로 정의된 함수는 구간의 경계인 x의 값에서 좌극한과 우극한을 비교하여 연속성을 조사한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x\le a) \\ x^2-x & (x>a) \end{cases},\ g(x)=x-(2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

출제 의도

두 함수의 곱이 연속이 될 조건을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$는 $x\ne a$에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=f(a)g(a)$가 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)\times\lim_{x\to a-} g(x)=(a+3)\times(-a-7)$$

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} f(x)\times\lim_{x\to a+} g(x)=(a^2-a)\times(-a-7)$$

$f(a)g(a)=(a+3)\times(-a-7)$

이므로 $(a+3)(a+7)=(a^2-a)(a+7)$

$(a^2-2a-3)(a+7)=0$, $(a-3)(a+1)(a+7)=0$

즉, $a=3$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=-7$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은

$3\times(-1)\times(-7)=21$

답 21

15 6051-0178

함수 $f(x)=\begin{cases} a & (x<0) \\ 2 & (x\ge 0) \end{cases}$에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

16 6051-0179

함수

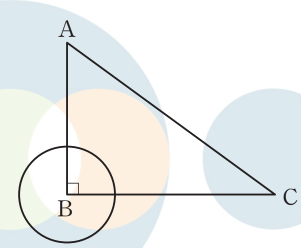
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & (x<0) \\ a & (x=0) \\ x+4 & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)\{f(x)+b\}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17 6051-0180

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\angle B=90°$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r $(r>0)$인 원이 삼각형 ABC의 변과 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(r)$라 하자.



최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(r)$에 대하여 함수 $f(r)g(r)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값을 구하시오.

유형 7 극한 또는 급수로 표현된 함수의 연속

출제유형 | 극한 또는 급수로 표현된 함수의 연속성을 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | x^n을 포함하는 식을 일반항으로 하는 수열의 극한으로 정의된 함수는 x의 값의 범위를 $|x|>1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|<1$인 경우로 각각 나누어 $f(x)$를 구하고, 등비급수로 정의된 함수는 첫째항과 공비를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le 1) \\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

출제 의도

극한으로 정의된 함수가 연속일 조건을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x\times x^n+3x^n}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\dfrac{1}{x^n}}=2x+3$$

즉, $f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le 1) \\ 2x+3 & (x>1) \end{cases}$

따라서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

이 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x+a)=1+a$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(2x+3)=5$

$f(1)=1+a$

이므로 $1+a=5$

따라서 $a=4$

답 ②

18 6051-0181

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+ax^2}{x^n+1}$$

이 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

19 6051-0182

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=0$

(나) 함수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2f(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(5)$의 값을 구하시오.

20 6051-0183

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n+1}-1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$$

이라 하자. $g(0)>0$이고, 함수 $g(x)$가 $x=-1$, $x=2$에서만 불연속일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

유형 8 사이값 정리

출제유형 | 사이값 정리를 이용하여 방정식의 실근이 존재하는 구간을 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 이용한다.

필수 유형

연속함수 $f(x)$가

$$f(1)f(2)<0,\ f(2)f(3)>0,\ f(3)f(4)>0$$

을 만족시킬 때, 다음 중 방정식 $f(x-1)f(x+1)=0$의 실근이 반드시 존재하는 구간은?

① $(1, 2)$　② $(2, 3)$　③ $(3, 4)$　④ $(4, 5)$　⑤ $(5, 6)$

출제 의도

사이값 정리를 이용하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$g(x)=f(x-1)f(x+1)$이라 하면 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 함수 $g(x)$도 연속함수이다.
$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)>0$에서 $f(1)\{f(2)\}^2f(3)<0$이므로
$f(2)\neq 0$, $f(1)f(3)<0$이고,
$f(2)f(3)>0$, $f(3)f(4)>0$에서 $f(2)\{f(3)\}^2f(4)>0$이므로
$f(3)\neq 0$, $f(2)f(4)>0$이다.
$g(2)=f(1)f(3)<0$, $g(3)=f(2)f(4)>0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x-1)f(x+1)=0$의 실근이 반드시 존재하는 구간은 열린 구간 $(2, 3)$이다.

답 ②

21 ○ 6051-0184

방정식 $3x+\sqrt{x}-9=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 실근이 존재하는 구간은?

① $(0, 1)$　② $(1, 2)$　③ $(2, 3)$　④ $(3, 4)$　⑤ $(4, 5)$

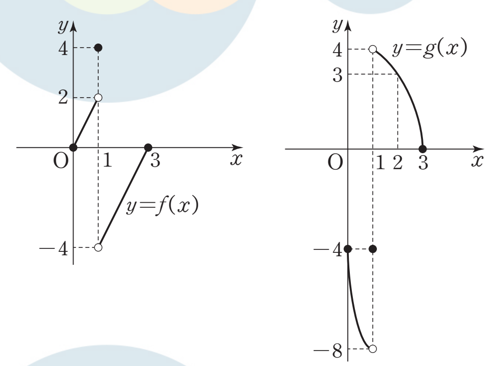
22 ○ 6051-0185

방정식 $x^3+2x+k-3=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 그 실근이 열린 구간 $(0, 2)$에서 존재하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5　② 7　③ 9　④ 11　⑤ 13

23 ○ 6051-0186

$0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=-16$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)g(x)=-5x$의 실근이 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나 존재한다.

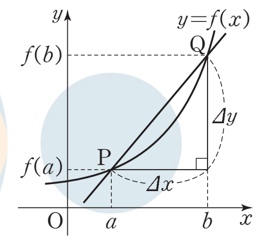
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 다항함수의 미분법

1 평균변화율

(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \text{ (단, } \Delta x=b-a\text{)}$$

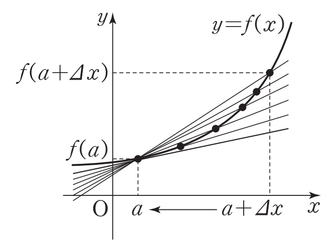


(2) 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.

2 미분계수

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

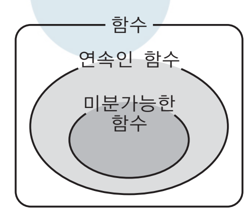


(2) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

3 미분가능과 연속

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$를 미분가능한 함수라고 한다.



(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 '함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.' 는 반드시 성립하는 것은 아니다.

4 도함수

(1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x의 값에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수 $f' : x \longrightarrow f'(x)$를 함수 $y=f(x)$의 도함수라고 한다. 즉,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

5 미분법의 공식

(1) 함수 $y=x^n$ (n은 자연수)와 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ (n은 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $y=cf(x)$이면 $y'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

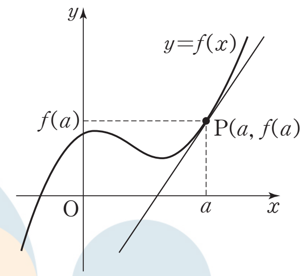
③ $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

④ $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

6 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



참고 접선의 방정식을 구하는 방법

(1) 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식

① 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

② $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

(2) 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

① 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고, t에 대한 방정식 $f'(t)=m$을 만족시키는 실수 t의 값을 구한다.

② ①에서 구한 t의 값을 $y-f(t)=m(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

(3) 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식

① 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고, 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

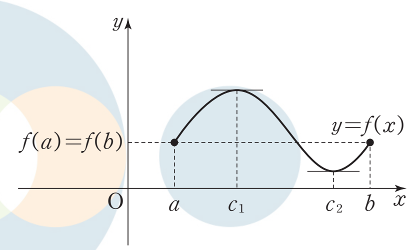
② ①에서 구한 접선의 방정식에 점 $(x_1,\ y_1)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.

③ ②에서 구한 t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

7 평균값 정리

(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



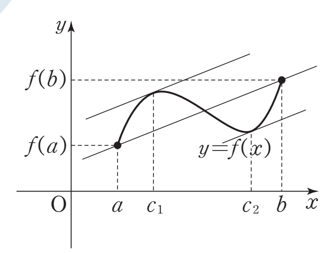
(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

참고 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.

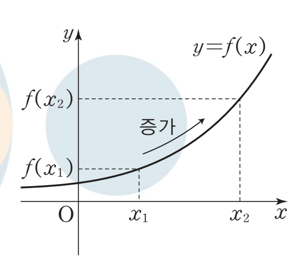


8 함수의 증가와 감소

(1) 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.



(2) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여

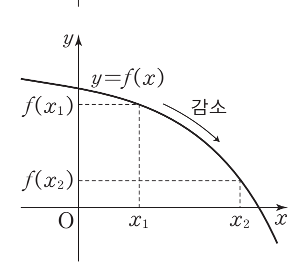
① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

참고 어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① 함수 $f(x)$가 이 구간에서 증가하면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

② 함수 $f(x)$가 이 구간에서 감소하면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이다.



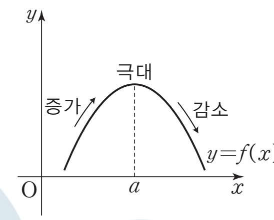
9 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소

① $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

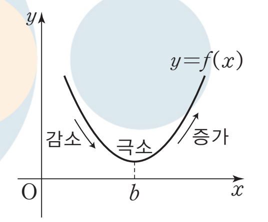
② $x=b$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하며, $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

③ 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.



(2) ① 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

② 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(b)=0$이고 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소이고, 극솟값은 $f(b)$이다.



10 함수의 최대와 최소

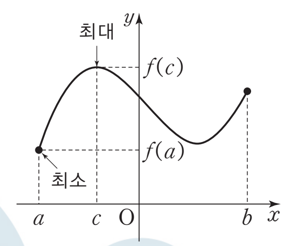
(1) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 그 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 모든 극댓값과 극솟값을 구한다.

② 구간의 양 끝값에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

③ 위에서 구한 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.



11 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다.

(3) 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값)×(극솟값)$<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값)×(극솟값)$=0 \Longleftrightarrow$ 중근과 다른 한 실근

③ (극댓값)×(극솟값)$>0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 서로 다른 두 허근

12 부등식에의 활용

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 성립함을 보이려면 일반적으로 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하여 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \ge 0$이 성립함을 보이려면 일반적으로 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하여 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

(3) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \ge g(x)$가 성립함을 보이려면 일반적으로 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 주어진 구간에서 함수 $h(x)$의 최솟값을 구하여 ($h(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

13 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

(1) $v=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$　　(2) $a=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

참고 $v=f'(t)$의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

① $v>0$이면 $x=f(t)$는 증가하므로 점 P의 운동 방향은 양의 방향이다.

② $v<0$이면 $x=f(t)$는 감소하므로 점 P의 운동 방향은 음의 방향이다.

정답과 풀이 40쪽

유형 1 평균변화율과 미분계수의 정의

출제유형 | 평균변화율과 미분계수의 정의를 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이고, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

임을 이용한다.

필수 유형

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}=8$을 만족시킬 때, $f'(1)f(1)$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

출제 의도

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}=8$에서 $h\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{h\to 0}\{f(1+2h)-3\}=0$
이때 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1)=3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}$$
$$=2f'(1)$$

이므로 $2f'(1)=8$에서 $f'(1)=4$
따라서 $f'(1)f(1)=4\times 3=12$

답 ③

01 6051-0187

함수 $f(x)=x^3-ax$에서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 3일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

02 6051-0188

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x^2-4}=6$일 때, $\frac{f'(2)}{f(2)}$의 값을 구하시오.

03 6051-0189

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기가 -1일 때, $\lim_{n\to\infty}nf\left(2+\frac{3}{n}\right)$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

유형 2 미분가능과 연속

출제유형 | 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성과 연속성의 관계를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

필수 유형 | 2008학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도

미분가능성과 연속성 사이의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$에서

$f'(1)=0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ (참)

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$에서

$f'(1)=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{1}{2}\times\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)$$
$$=f'(1)$$
$$=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|1+h-1|-|1-h-1|}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}$$
$$=0\ (|h|=|-h|\text{이므로})\text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

04

6051-0190

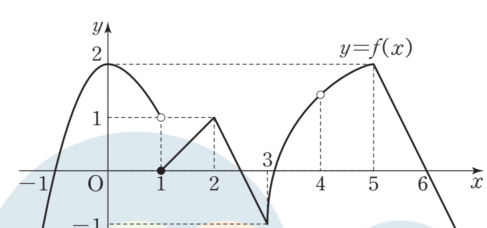
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-f(x^2)}{x-1}=4$일 때, $f'(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

05

6051-0191

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



정수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B를

$A=\{a\mid \lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0,\ -1\le a\le 6\text{이다.}\}$

$B=\left\{b\,\middle|\,\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\text{의 값이 존재하고, }-1\le b\le 6\text{이다.}\right\}$

이라 할 때, 집합 $A-B$의 모든 원소의 합을 구하시오.

유형 3 구간별로 정의된 함수의 미분가능성

출제유형 | 구간별로 정의된 함수에 대하여 구간의 경계에서의 미분가능성을 이용하여 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다항함수 $p(x)$, $q(x)$에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} p(x) & (x<a) \\ q(x) & (x\ge a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

(1) $x=a$에서 연속이다. ⇨ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(2) $x=a$에서 미분계수가 존재한다.

⇨ $\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

필수 유형 | 2013학년도 대수능 |

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x\ge 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

출제 의도

구간별로 정의된 함수가 구간의 경계에서 미분가능할 조건을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}(x^3+ax)=\lim_{x\to 1+}(bx^2+x+1)=f(1)$에서 $1+a=b+2$

따라서 $a-b=1$　　⋯⋯ ㉠

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{b(1+h)^2+(1+h)+1-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{bh^2+(2b+1)h}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(bh+2b+1)=2b+1$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{(1+h)^3+a(1+h)-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{h^3+3h^2+(a+3)h+1+a-(1+a)}{h}$ (㉠에 의해)

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{h^3+3h^2+(a+3)h}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}(h^2+3h+a+3)=a+3$

이므로 $2b+1=a+3$

따라서 $a-2b=-2$　　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$, $b=3$이므로

$a+b=4+3=7$

답 ③

06 6051-0192

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-2)x & (x<1) \\ -3x+a+b & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

07 6051-0193

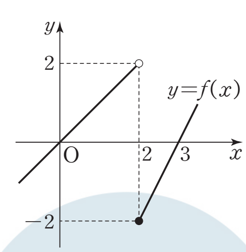
함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<0) \\ x+3 & (x\ge 0) \end{cases}$에 대하여 함수 $(x^n+k)f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

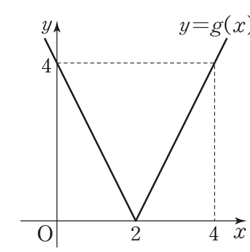
(단, k는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

08 6051-0194

두 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<2) \\ 2x-6 & (x\ge 2) \end{cases}$, $g(x)=|2x-4|$의 그래프가 그림과 같다.





보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 41쪽

유형 4 미분법의 공식

출제유형 | 미분법을 이용하여 미분계수를 구하거나 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) $y=x^n$ (n은 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(5) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

필수 유형

함수 $f(x)=x^3+ax$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=8$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

출제 의도

미분계수의 정의와 미분법을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}=2f'(1)$$

에서 $2f'(1)=8$이므로 $f'(1)=4$

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(1)=3+a=4$

즉, $a=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로 $f(2)=2^3+2=10$

답 ⑤

09 6051-0195

함수 $f(x)=x^3-2x^2+3$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

10 6051-0196

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=x^3+2xf'(1)$일 때, $f'(2)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11 6051-0197

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=5$$

를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)-x^3$의 $x=2$에서의 미분계수는?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

12 6051-0198

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)+g(x)=x^3+4x^2-3$

(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{x^3+1}=2$

$f'(1)=6$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오.

유형 5 곱의 미분법

출제유형 | 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=a$에서의 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $h(x)=f(x)g(x)$의 도함수를 구할 때는 $f'(x)$, $g'(x)$를 구한 후 곱의 미분법 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$를 이용한다.

필수 유형 | 2013학년도 대수능 6월 모의평가 |

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1}=9$를 만족시킨다.
$g(x)=xf(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $x \longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x \to 1}\{f(x)-5\}=0$
함수 $f(x)$가 연속함수이므로
$f(1)=5$ …… ㉠
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$
$g(x)=xf(x)$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로
$g'(1)=f(1)+f'(1)$
$=5+9$ (㉠, ㉡에 의해)
$=14$

답 14

13 6051-0199

함수 $f(x)=(x^3+2x-3)(x^2-4)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

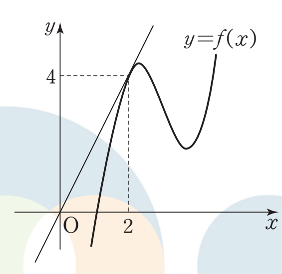
14 6051-0200

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h)g(0)-f(0)g(-2h)}{h}=4$$
를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

15 6051-0201

그림과 같이 다항함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 4)$에서 원점을 지나는 직선에 접한다. $g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값은?



① 48 ② 52 ③ 56
④ 60 ⑤ 64

유형 6 접선의 방정식

출제유형 | 곡선 위의 한 점이 주어지거나 기울기가 주어질 때 접선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

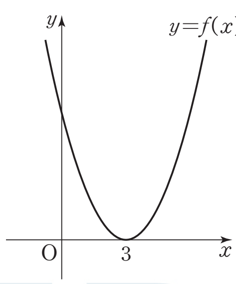
출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 미분가능할 때

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

(2) 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓고, t에 대한 방정식 $f'(t)=m$을 만족시키는 실수 t의 값을 구한 후 접선의 방정식 $y-f(t)=m(x-t)$를 구한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$가 $f(x)=(x-3)^2$이다.



함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 y절편이 -5일 때, 이 접선의 x절편은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

출제 의도

곡선 위의 한 점이 주어졌을 때, 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로 $g'(x)=(x-3)^2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=(2-3)^2=1$이고

이 접선의 y절편이 -5이므로 접선의 방정식은 $y=x-5$이다.

따라서 x절편은 5이다.

답 ⑤

16

6051-0202

곡선 $y=-3x^3+4x+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -20　② -25　③ -30　④ -35　⑤ -40

17

6051-0203

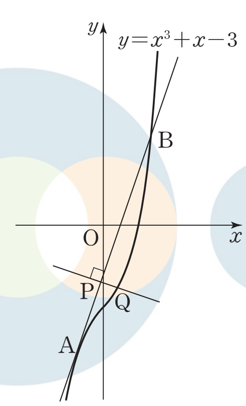
곡선 $y=x^3+x^2-2x+4$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 두 점 A, B의 x좌표의 곱이 -2일 때, 점 A에서의 접선의 기울기는?

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

18

6051-0204

곡선 $y=x^3+x-3$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1, -5)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 B라 하자. 선분 AB 위의 점 P를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 이 곡선과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최댓값은 a이다. $34a^2$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 두 점 A, B가 아니다.)



유형 7 평균값 정리

출제유형 | 함수의 그래프와 평균값 정리를 이용하여 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

필수 유형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{5}{3}\right)$의 값을 구하시오.

(가) $f(1)=2$, $f(3)=8$
(나) $1<x<3$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 3$이다.

출제 의도

다항함수의 그래프와 평균값 정리를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$1<t<3$인 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[1, t]$에서 연속이고 열린 구간 $(1, t)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(c_1)$ $(1<c_1<t)$인 c_1이 존재한다.

$f'(x)\le 3$이므로 $\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\le 3$, $f(t)-f(1)\le 3(t-1)$

따라서 $f(t)\le 3t-1$ …… ㉠

닫힌 구간 $[t, 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(t, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(3)-f(t)}{3-t}=f'(c_2)$ $(t<c_2<3)$인 c_2가 존재한다.

$f'(x)\le 3$이므로 $\dfrac{f(3)-f(t)}{3-t}\le 3$, $f(3)-f(t)\le 3(3-t)$

따라서 $f(t)\ge 3t-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(t)=3t-1$ $(1<t<3)$이므로

$f\left(\frac{5}{3}\right)=3\times\frac{5}{3}-1=4$

답 4

19 6051-0205

함수 $f(x)=-x^3-5x^2+3$에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② 0 ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

20 6051-0206

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. $f(1)=1$, $f(2)=0$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=1$은 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21 6051-0207

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\le 2$일 때, $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 자연수)이다.
(나) 2 이상의 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le 9$이다.

$f(4)$의 최댓값을 구하시오.

유형 8 **함수의 증가와 감소**

출제유형 | 함수가 증가 또는 감소할 조건을 이용하여 미정계수를 결정하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간에서 증가하면 그 구간에서 $f'(x)\geq 0$, 감소하면 그 구간에서 $f'(x)\leq 0$이 성립한다.

(3) 상수함수가 아닌 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 6월 모의평가 |

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

출제 의도

삼차함수가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위한 조건을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=x^3+ax^2+2ax$이므로

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2+2ax+2a\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a\leq 0$에서 $0\leq a\leq 6$

따라서 $M=6$, $m=0$이므로

$M-m=6-0=6$

답 ④

정답과 풀이 43쪽

22 6051-0208

삼차함수 $f(x)=-x^3-3x^2+ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

23 6051-0209

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2ax+3$이 열린 구간 $(a, 3)$에서 감소할 때, $f(3)$의 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24 6051-0210

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최솟값은?

(가) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
(나) $f(1)=2$, $f'(1)=3$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 9 함수의 극대와 극소

출제유형 | 함수 $f(x)$의 극대, 극소와 관련된 다양한 유형의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
① 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
② 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(2) $x=a$에서 미분가능하지 않더라도 $x=a$를 포함하는 구간의 모든 x에 대하여
① $f(x) \le f(a)$가 되는 구간이 존재하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
② $f(x) \ge f(a)$가 되는 구간이 존재하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 극값을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로
$g(1)=24$, $g'(1)=0$
$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서
$g(1)=3f(1)=24$이므로 $f(1)=8$
또 $g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$이므로
$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$에서 $f'(1)=-8$
따라서 $f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$

답 16

25 ▸ 6051-0211

함수 $f(x)=2x^3-6x^2+5$의 극솟값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

26 ▸ 6051-0212

사차함수 $f(x)=x^2(3x^2+4x-12)+a$의 극댓값이 10일 때, 모든 극솟값의 합은? (단, a는 상수이다.)

① -11 ② -13 ③ -15
④ -17 ⑤ -19

27 ▸ 6051-0213

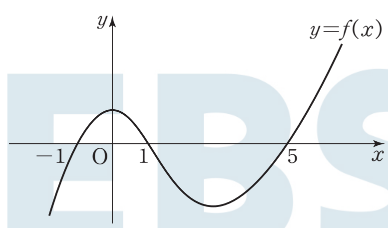
함수 $y=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$의 극솟값이 0이 되도록 하는 자연수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

28

6051-0214

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(-1)=f(1)=f(5)=0$이다. 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.



29

6051-0215

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$에서 극값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$가 모두 직선 $y=4x$ 위에 있을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는?

① $2\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

30

6051-0216

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 12를 갖는다.
> (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 오직 -4뿐이다.

$f(5)$의 값을 구하시오.

31

6051-0217

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3ax^2-1 & (x<1) \\ a(x-4) & (x\geq 1) \end{cases}$$

의 모든 극값의 합이 5일 때, $f(-2)$의 값은?

(단, a는 음의 실수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

32

6051-0218

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖는다.

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

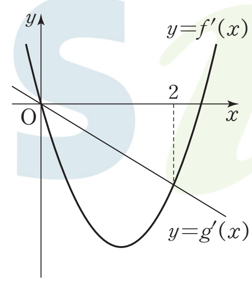
유형 10 함수의 그래프

출제유형 | 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 성질이나 개형을 파악하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 미분을 이용하여 함수의 증가, 감소를 나타내는 표를 만들고 이를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그려서 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 6월 모의평가 |

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도

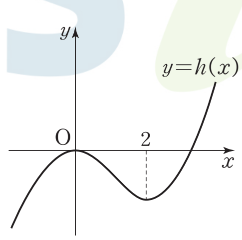
도함수의 그래프를 이용하여 함수의 그래프의 특성을 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$h(x)=f(x)-g(x)$는 삼차함수이고
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 중근과 다른 한 실근을 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

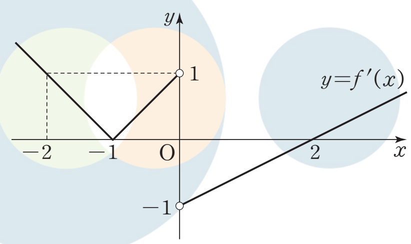
답 ③

33 ▸ 6051-0219

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x)=\begin{cases} |x+1| & (x<0) \\ \frac{1}{2}x-1 & (x>0) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같을 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $0<x<1$에서 감소한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

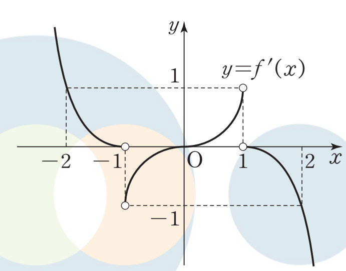
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34 ▸ 6051-0220

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & (x<-1) \\ -x^2 & (-1<x\le 0) \\ x^2 & (0<x<1) \\ -(x-1)^2 & (x>1) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같을 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=f(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 46쪽

유형 11 함수의 최대와 최소

출제유형 | 닫힌 구간에서 연속인 함수의 최댓값, 최솟값을 구하거나 도형의 길이, 넓이, 부피 등에 대한 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
(2) 주어진 문제 상황에 관련된 함수식을 만들고 미분을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

필수 유형 | 2013학년도 대수능 6월 모의평가 |

닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=20$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도

닫힌 구간에서 다항함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=a+16$, 최솟값 $m=a-4$이므로
$M+m=20$에서 $a+16+a-4=20$
$2a+12=20$, $2a=8$
따라서 $a=4$

답 ④

35

6051-0221

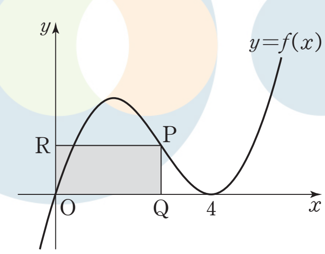
닫힌 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)=x^4-4x+a$의 최솟값이 -4일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

36

6051-0222

삼차함수 $f(x)=x(x-4)^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ $(0<t<4)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 사각형 OQPR의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



37

6051-0223

사차함수 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 닫힌 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은?

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

유형 12 방정식에의 활용

출제유형 | 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 최고차항의 부호, 극값의 존재 여부와 극값, 근의 개수, 대칭성 등을 파악하여 결정한다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

필수 유형

두 함수

$y=4x^3-8x^2+16$, $y=-x^4+k$

의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

출제 의도

방정식의 실근의 개수를 만족시키는 사차함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 함수 $y=4x^3-8x^2+16$, $y=-x^4+k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $4x^3-8x^2+16=-x^4+k$가 서로 다른 세 개의 실근을 가져야 한다.

$x^4+4x^3-8x^2+16-k=0$에서

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+16-k$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2-16x=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-4)=(-4)^4+4\times(-4)^3-8\times(-4)^2+16-k$

$=-112-k$

$f(0)=16-k$

$f(1)=1+4-8+16-k=13-k$

이므로 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$16-k=0$ 또는 $13-k=0$이어야 한다.

따라서 구하는 상수 k는 16, 13이고 그 합은 $16+13=29$이다.

답 29

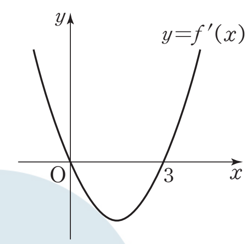
38 6051-0224

x에 대한 방정식 $x^3-3x^2+n=0$이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

39 6051-0225

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



x에 대한 방정식 $2f(x)=n$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합이 12일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오.

40 6051-0226

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖는다.
(나) 방정식 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$f(4)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

유형 13 부등식에의 활용

출제유형 | 주어진 범위에서 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립함을 보이려면 일반적으로 주어진 구간에서 $f(x)$의 최솟값을 구하여 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립함을 보이려면 일반적으로 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 주어진 구간에서 $h(x)$의 최솟값을 구하여 ($h(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f'(x)$이다.

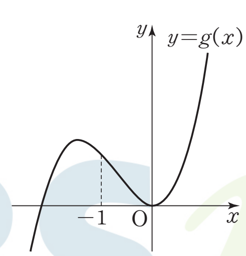
① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

출제 의도

도함수로부터 삼차함수의 그래프의 성질을 파악하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f(0)=f'(0)$에서 $c=b$
따라서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+b$
$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면
$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$
$g(0)=0$이고, $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로 그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로
$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서
$g'(0)=b-2a=0$
따라서 $b=2a$
$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$이므로 $g(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=3-a$이고, $x\ge -1$에서 $g(x)\ge 0$이므로
$3-a\le -1$이어야 한다. 따라서 $a\ge 4$
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로
$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8\ge 10\times 4+8=48$
따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

답 ⑤

41 6051-0227

$x>a$에서 부등식 $x^3-6x^2+32>0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

42 6051-0228

두 함수 $f(x)=x^4-3x^3+2x+7$, $g(x)=x^3+2x+k$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① -12 ② -16 ③ -20 ④ -24 ⑤ -28

43 6051-0229

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|f(x)-4x|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\ge 0$이다.

$f(3)$의 값을 구하시오.

유형 14 속도와 가속도

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점의 시각 t에서의 위치, 속도, 가속도를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$로 주어질 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도 a는 $a=\dfrac{dv}{dt}$

필수 유형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가

$x=t^3-6t^2+kt$

이다. 점 P가 출발 후 운동 방향의 변화가 없을 때, 상수 k의 최솟값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

출제 의도

점의 위치가 시각에 대한 함수로 주어졌을 때, 점의 운동 방향에 대하여 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

운동 방향의 변화가 없으려면 속도의 부호의 변화가 없어야 하므로 $t>0$일 때 $\dfrac{dx}{dt}\geq 0$이어야 한다.

$x=t^3-6t^2+kt$에서 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+k=3(t-2)^2+k-12$

$f(t)=3(t-2)^2+k-12$라 하면

$t>0$에서 $f(t)\geq 0$이려면 $f(2)\geq 0$이어야 한다.

$f(2)=k-12\geq 0$, $k\geq 12$

따라서 상수 k의 최솟값은 12이다.

답 ④

44

6051-0230

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가

$x=-t^4+4t^3+2t-5$

이다. 점 P가 출발 후 가속도가 최대인 순간, 점 P의 속도는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

45

6051-0231

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가

$x=11+5t-5t^2$

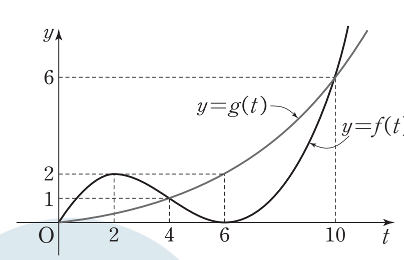
이다. 점 P의 속도가 0인 순간의 위치는?

① 11.5 ② 11.75 ③ 12
④ 12.25 ⑤ 12.5

46

6051-0232

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 위치가 각각 다항함수 $f(t)$, $g(t)$이다. 두 다항함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같고, $f'(2)=f'(6)=0$이다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $0<t<2$일 때, 점 A는 점 B보다 원점에서 항상 멀리 있다.
ㄴ. $2<t<6$일 때, 두 점 A, B는 서로 반대 방향으로 움직인다.
ㄷ. $6<t<10$일 때, 두 점 A, B의 속도가 같아지는 순간이 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08 다항함수의 적분법

1 부정적분

(1) 부정적분의 뜻

① 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

② 함수 $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때, $f(x)$의 임의의 부정적분은 $F(x)+C$ (C는 상수)꼴로 나타내어진다. 즉, $\int f(x)dx=F(x)+C$이고, C를 적분상수라고 한다.

(2) x^n의 부정적분과 부정적분의 성질

① n이 0 또는 양의 정수일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

② $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

③ $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$, $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

(3) 부정적분과 미분의 관계

① $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

② $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

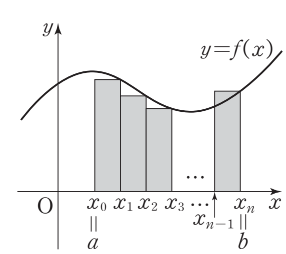
2 구분구적법

어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 작은 도형으로 잘게 나누고 이들 도형의 넓이 또는 부피의 합을 구한 후 이 합의 극한값으로 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법이다.

3 정적분

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$의 값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 기호로 $\int_a^b f(x)dx$와 같이 나타낸다.

$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$



(2) 함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a<x<b$)

(3) 미적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때

$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

(4) 정적분의 성질

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$, $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

② 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

4 정적분과 급수

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

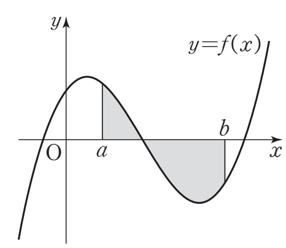
5 정적분의 활용

(1) 곡선과 좌표축 사이의 넓이

① 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

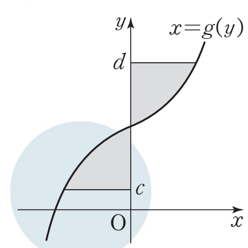
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



② 곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $x=g(y)$가 닫힌 구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

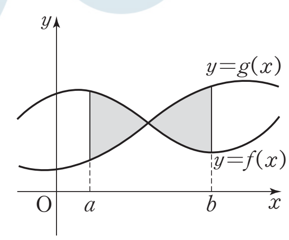
$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$



(2) 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$



6 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때

(1) 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

(2) 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면 시각 t에서의 점 P의 위치 $x(t)$는

$$x(t)=x_0+\int_a^t v(t)\,dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_a^b |v(t)|\,dt$$

08 다항함수의 적분법

유형 1 부정적분의 뜻과 성질

출제유형 | 부정적분의 성질을 이용한 계산 또는 부정적분과 미분의 관계를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) n이 0 또는 양의 정수일 때

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(3) $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(4) $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(5) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\} = f(x)$

필수 유형

다음 중

$$\int (x-1)(x+1)dx + \int (x+1)(x^2-x+1)dx$$

를 간단히 한 것은? (단, C는 적분상수이다.)

① $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$　② $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+C$

③ $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$　④ $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+C$

⑤ $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x+C$

출제 의도

부정적분의 성질을 이용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\int (x-1)(x+1)dx + \int (x+1)(x^2-x+1)dx$

$= \int (x^2-1)dx + \int (x^3+1)dx$

$= \int \{(x^2-1)+(x^3+1)\}dx$

$= \int (x^3+x^2)dx$

$= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$ (단, C는 적분상수)

답 ①

01

6051-0233

다항함수 $f(x)$가

$$\int f(x)dx = x^3+x^2-x$$

를 만족시킬 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

02

6051-0234

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $2f(x)+g(x)$의 부정적분 중 하나가 x^3+2x^2-3x이다.

(나) 함수 $f(x)-g(x)$의 부정적분 중 하나가 $-x^3-\frac{1}{2}x^2$이다.

$\int f'(x)dx$를 구한 것은? (단, C는 적분상수이다.)

① x^2+x+C　② x^2-x+C　③ $-x+C$
④ $x+C$　⑤ $2x+C$

03

6051-0235

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 극값을 갖고 그 도함수 $f'(x)$는 최솟값 -6을 갖는다. $f(0)=0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

유형 2 구분구적법

출제유형 | 구분구적법을 이용하여 도형의 넓이나 부피를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구분구적법을 이용하여 구하는 방법

(ⅰ) 주어진 도형을 작은 도형으로 잘게 나눈다.

(ⅱ) 이들 도형의 넓이 또는 부피의 합을 구한다.

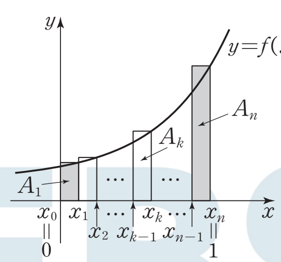
(ⅲ) (ⅱ)에서 구한 합의 극한값으로 도형의 넓이 또는 부피를 구한다.

필수 유형 | 2010학년도 대수능 |

함수 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a\geq 0$, $b>0$)가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0, 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$

이라 하자. 닫힌 구간 $[x_{k-1}, x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. ($k=1, 2, \cdots, n$)



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이 $A_1+A_n=\dfrac{7n^2+1}{n^3}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

구분구적법을 이해하고 급수를 정적분으로 고쳐서 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$A_1=\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $A_n=\dfrac{1}{n}f(1)$이므로

$$A_1+A_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)\right\}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

이때 $a=0$이고 $1+a+2b=7$이므로 $b=3$이다.

따라서 $f(x)=x^2+3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}\times\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$=8\int_0^1 xf(x)dx=8\int_0^1 x(x^2+3)dx$$

$$=8\int_0^1 (x^3+3x)dx$$

$$=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$$

답 14

04 ▸ 6051-0236

함수 $f(x)=x^3$에 대하여 닫힌 구간 $[0, 1]$을 n ($n\geq 2$)등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로

$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$

이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{n}$의 값은?

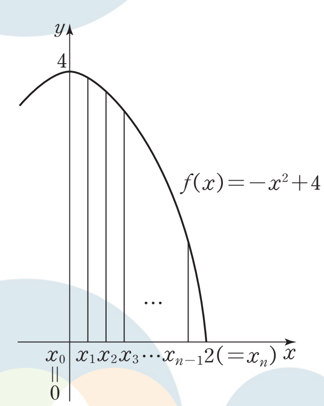
① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

05 ▸ 6051-0237

그림과 같이 이차함수 $f(x)=-x^2+4$에 대하여 닫힌 구간 $[0, 2]$를 n ($n\geq 2$)등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로

$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=2$

라 하자.



$l_k=f(x_{k-1})-f(x_k)$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{20}l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$$

가 성립할 때, x_{20}의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{22}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{23}}{3}$ ④ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

유형 3 정적분의 성질과 계산

출제유형 | 정적분의 성질을 이용하여 계산을 하거나 정적분의 성질을 이해하고 이를 활용한 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

(2) 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

필수 유형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=0$이고

$$\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^2 f(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

출제 의도

정적분의 성질을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 조건에 의하여 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 (x^3+ax^2+bx)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_{-1}^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)=\frac{2}{3}a=2$$

따라서 $a=3$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3+3x^2+bx)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=4+8+2b=0$$

즉, $b=-6$이므로 $f(x)=x^3+3x^2-6x$

따라서 $f(5)=5^3+3\times5^2-6\times5=170$

답 170

06 ▸ 6051-0238

$\int_{-1}^1 |x(x-1)|\,dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

07 ▸ 6051-0239

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=f'(2)=0$

(나) $f(-1)=f(2)=2$

$\int_{-1}^2 |f'(x)|\,dx=4$일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

08 ▸ 6051-0240

정의역이 $\{x\,|\,x\geq 0\}$인 함수 $f(x)=\int_0^2 |2t-x|\,dt$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(5)=6$

ㄴ. 최솟값은 2이다.

ㄷ. $x=4$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 4 함수의 성질을 이용한 정적분

출제유형 | 함수의 그래프가 원점 또는 y축에 대하여 대칭일 때, 함수의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$일 때

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(2) 함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

필수 유형 | 2013학년도 대수능 |

함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2$$

일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

출제 의도

대칭성을 갖는 함수의 정적분을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2 dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}1\,dx$$
$$=2\left[x\right]_0^1=2$$

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2$에서

$\frac{8}{3}=4k$이므로 $k=\frac{2}{3}$이다.

답 ④

09 6051-0241

$\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x-1)dx$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

10 6051-0242

함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=3x^2+\frac{1}{2}x\int_{-1}^{1} f(t)dt+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

가 성립할 때, $f(3)$의 값은?

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

11 6051-0243

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-1}^{1}15f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) 극댓값은 존재하지 않고 극솟값은 2이다.
(다) $\int_{0}^{1} f'(x)dx=2$

유형 5 정적분으로 표현된 함수

출제유형 | 정적분으로 표현된 함수의 미분을 이용하거나 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ (단, } a<x<b)$$

(2) 연속함수 $f(t)$와 상수 a에 대하여

① $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(a)$

② $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt = f(a)$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$$

이고 $f'(2)=17$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

정적분으로 표현된 함수의 미분을 이용하여 함수 $f'(x)$를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$에서

$f'(x)=2ax+1$

$f'(2)=4a+1=17$이므로

$a=4$

답 4

정답과 풀이 51쪽

12 6051-0244

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (6t^2+at-1)dt=10$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13 6051-0245

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = xf(x)-\frac{4}{3}x^3+ax^2$ 이다.

(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 갖는다.

$f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14 6051-0246

최고차항의 계수가 1인 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4t+4)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=|g'(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g'(4)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

유형 6 정적분과 급수

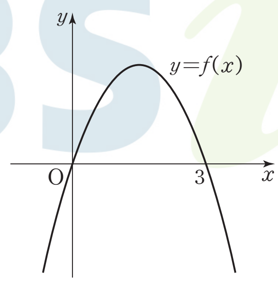
출제유형 | 복잡한 급수를 정적분으로 표현하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

필수 유형 | 2015학년도 대수능 9월 모의평가 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f(0)=f(3)=0$이다.



$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{7}{6}$일 때, $f'(0)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3
③ $\frac{7}{2}$ ④ 4
⑤ $\frac{9}{2}$

출제 의도

급수를 정적분으로 나타내어 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 이차함수 $f(x)$에서 $f(0)=f(3)=0$이므로
$f(x)=ax(x-3)\ (a<0)$으로 놓을 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (ax^2-3ax)\,dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=a\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=-\frac{7}{6}a=\frac{7}{6}$$

따라서 $a=-1$
즉, $f(x)=-x^2+3x$이고 $f'(x)=-2x+3$이므로
$f'(0)=3$

답 ②

15 ○ 6051-0247

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4+\cdots+(n+n)^4}{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}$의 값을 구하시오.

16 ○ 6051-0248

함수 $f(x)=3x^2+2x+a$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=5$$

일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

17 ○ 6051-0249

함수 $f(x)=2x^2+4x-2$에 대하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

유형 7 곡선과 좌표축 사이의 넓이

출제유형 | 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$이다.

(2) 곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $x=g(y)$가 닫힌 구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$이다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$이고 $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

출제 의도

부정적분을 이용하여 함수를 정하고, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\int (x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$이다.

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x=\frac{1}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ 이므로

곡선 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left|\frac{1}{3}x^3-x\right| dx&=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)dx\\&=2\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}\\&=2\left(-\frac{9}{12}+\frac{3}{2}\right)\\&=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 52쪽

18 6051-0250

함수 $f(x)=x^2-4x+4$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

19 6051-0251

함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x+1)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

20 6051-0252

함수 $f(x)=|x-3|(x-1)-4x+12$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 37 ② $\frac{112}{3}$ ③ $\frac{113}{3}$
④ 38 ⑤ $\frac{115}{3}$

유형 8 두 곡선 사이의 넓이

출제유형 | 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

필수 유형 | 2014학년도 대수능 |

곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

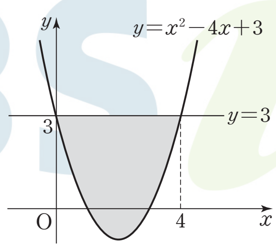
① 10 ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$
④ 11 ⑤ $\frac{34}{3}$

출제 의도

정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는
$x^2-4x+3=3$에서 $x(x-4)=0$
이므로 $x=0$ 또는 $x=4$
닫힌 구간 $[0, 4]$에서
$x^2-4x+3\le 3$이므로
곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^4 \{3-(x^2-4x+3)\}\,dx$$
$$=\int_0^4 (-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$$
$$=-\frac{64}{3}+32$$
$$=\frac{32}{3}$$

답 ③

21 6051-0253

곡선 $y=x^3+1$과 이 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7
④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

22 6051-0254

함수 $f(x)=|x^2-2x-1|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 다음 중 함수 $f(x)=|x^2-2x-1|$의 그래프와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 나타낸 식으로 옳은 것은? (단, k는 상수이다.)

① $\int_{-1}^{1}\{4-f(x)\}\,dx$ ② $\int_{-1}^{1}\{2-f(x)\}\,dx$
③ $2\int_{1}^{3}\{4-f(x)\}\,dx$ ④ $2\int_{-1}^{3}\{2-f(x)\}\,dx$
⑤ $2\int_{1}^{3}\{2-f(x)\}\,dx$

23 6051-0255

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값, $x=a$에서 극솟값을 갖는다. 점 $A(a, f(a))$에서의 접선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 $B(b, f(b))$라 하자. $b\le -1$일 때, 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최솟값을 구하시오.

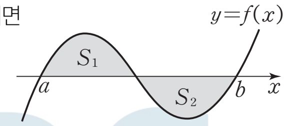
정답과 풀이 54쪽

유형 9 넓이와 정적분

출제유형 | 도형의 넓이 사이의 관계를 정적분으로 나타내어 여러 가지 값을 구하는 문제가 출제된다.

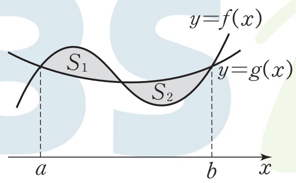
출제유형잡기 | (1) 그림에서 $S_1=S_2$이면

$\int_a^b f(x)dx=0$



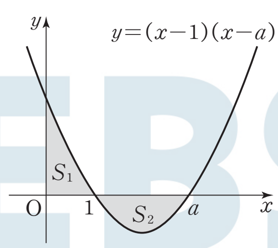
(2) 그림에서 $S_1=S_2$이면

$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$



필수 유형

그림과 같이 곡선 $y=(x-1)(x-a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=(x-1)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>1$)



출제 의도

도형의 넓이 사이의 관계와 정적분을 이용하여 상수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$S_1=\int_0^1 (x-1)(x-a)dx$, $S_2=\int_1^a \{-(x-1)(x-a)\}dx$

이고 $S_1=S_2$이므로

$\int_0^1 (x-1)(x-a)dx=\int_1^a \{-(x-1)(x-a)\}dx$

$\int_0^1 (x-1)(x-a)dx+\int_1^a (x-1)(x-a)dx=0$

$\int_0^a (x-1)(x-a)dx=0$

$\int_0^a \{x^2-(a+1)x+a\}dx=0$

$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+ax\right]_0^a=-\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}=0$

$a^2(a-3)=0$

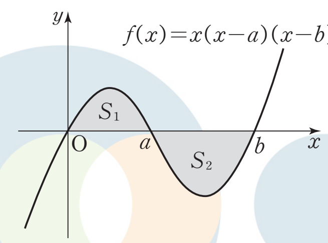
$a>1$이므로 $a=3$

답 3

24

6051-0256

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x(x-a)(x-b)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 두 부분 중 경계를 포함하는 x축 윗부분의 넓이를 S_1, 경계를 포함하는 x축 아랫부분의 넓이를 S_2라 하자.



$2S_1=S_2$일 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $0<a<b$)

① $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f(x)dx=0$

② $2\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f(x)dx=0$

③ $4\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f(x)dx=0$

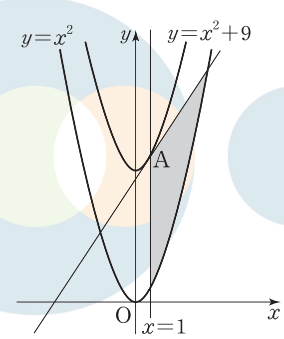
④ $2\int_0^a f(x)dx=\int_0^b f(x)dx$

⑤ $4\int_0^a f(x)dx=\int_0^b f(x)dx$

25

6051-0257

그림과 같이 곡선 $y=x^2+9$와 직선 $x=1$이 만나는 점을 A라 할 때, 점 A에서의 접선과 곡선 $y=x^2$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 부분 중 직선 $x=1$의 오른쪽에 색칠된 부분의 넓이를 S라 하자. 곡선 $y=x^2+a^2$과 직선 $x=1$이 만나는 점을 B라 할 때, 점 B에서의 접선과 곡선 $y=x^2$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분 중 직선 $x=1$의 오른쪽 부분의 넓이가 $\frac{S}{9}$이다. 양수 a의 값은?



① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt[3]{3}$ ③ $\sqrt[4]{3}$

④ $\sqrt[5]{3}$ ⑤ $\sqrt[6]{3}$

유형 10 속도와 거리

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점 또는 물체의 시각 t에서의 속도에 대한 식이나 그래프가 주어질 때, 점 또는 물체의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때

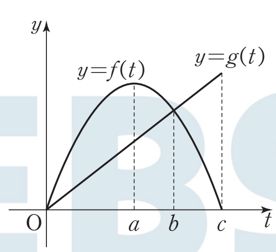
(1) 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이다.

(2) 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면 시각 t에서의 점 P의 위치 $x(t)$는 $x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$이다.

(3) 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$이다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 9월 모의평가 |

같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t $(0\le t\le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이고 $0\le t\le c$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기
ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도

속도를 나타내는 그래프를 통하여 물체의 위치 또는 위치의 변화량을 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

ㄱ. 주어진 그림에서 $\int_0^a f(t)dt>\int_0^a g(t)dt$이므로 $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. 두 물체 A, B의 높이의 차 $\int_0^t |f(t)-g(t)|dt$의 값은 t의 값이 b일 때까지 증가하다 그 이후로 감소하므로 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

26 6051-0258

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-2t$일 때, 출발 후 점 P가 운동 방향이 바뀌는 순간까지 움직인 거리는?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{5}{27}$

27 6051-0259

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-8t$일 때, 출발 후 가속도가 4가 되는 시각까지 점 P의 위치의 변화량은?

① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

28 6051-0260

원점에서 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각

$v_P(t)=t^2-2t$, $v_Q(t)=-t^2+4t$

이다. 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

09 순열과 조합

1 경우의 수

(1) 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

(2) 곱의 법칙

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 이 순서대로 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

2 순열

(1) 순열의 뜻

서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$와 같이 나타낸다.

$${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}\ (\text{단, } 0<r\le n)$$

또 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것 $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$을 n의 계승이라 하고, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 따라서 ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$이다.

$0!=1$, ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$로 정의하면 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로 ${}_{n}\Pi_{r}$와 같이 나타낸다.

$${}_{n}\Pi_{r}=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^{r}$$

참고 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$에서는 $n\ge r$이어야 하지만 중복순열의 수 ${}_{n}\Pi_{r}$에서는 $n<r$일 수도 있다.

(3) 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 하고, 이 원순열의 수는 $(n-1)!$이다.

설명 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n!$이고, 회전하면 같아지는 것이 n가지씩 있으므로 원순열의 수는 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

(4) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 가운데 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들 모두를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\,q!\cdots r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

3 조합

(1) 조합의 뜻

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$와 같이 나타낸다. ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$로 정의하면

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

(2) 조합의 수

① ${}_{n}C_{0}=1$

② ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$ (단, $0\leq r\leq n$)

③ ${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1\leq r<n$)

(3) 중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_{n}H_{r}$와 같이 나타낸다.

$${}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}$$

설명 두 개의 문자 a, b 중에서 중복을 허락하여 4개의 문자를 택하는 경우는 그림과 같고, 각각의 경우는 두 종류의 문자 a, b를 구분하는 기호 '|'와 문자를 나타내는 기호 'O'를 일렬로 배열하는 경우와 같다. 기호 '|'는 두 종류의 문자 a, b를 구분해야 하므로 $(2-1)$개가 필요하다. 따라서 이렇게 배열하는 경우의 수는 다섯 개의 자리에서 기호 'O'를 놓을 4자리를 택하는 경우의 수 ${}_{(2-1)+4}C_{4}$와 같다.

$${}_{2}H_{4}\left\{\begin{array}{l} aaaa \leftrightarrow \mathrm{OOOO|} \\ aaab \leftrightarrow \mathrm{OOO|O} \\ aabb \leftrightarrow \mathrm{OO|OO} \\ abbb \leftrightarrow \mathrm{O|OOO} \\ bbbb \leftrightarrow \mathrm{|OOOO} \end{array}\right\}{}_{(2-1)+4}C_{4}$$

즉, ${}_{2}H_{4}={}_{(2-1)+4}C_{4}={}_{5}C_{4}=5$이다.

참고 조합의 수 ${}_{n}C_{r}$에서는 $n\geq r$이어야 하지만 중복조합의 수 ${}_{n}H_{r}$에서는 $n<r$일 수도 있다.

(4) 중복조합의 활용

① 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수

두 자연수 n, r에 대하여 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 ${}_{n}H_{r}$이다.

② 방정식을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수

두 자연수 n, r에 대하여 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ ($n\leq r$)를 만족시키는 자연수의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 ${}_{n}H_{r-n}$이다.

설명 $x_1=x_1'+1$, $x_2=x_2'+1$, $x_3=x_3'+1$, $\cdots$, $x_n=x_n'+1$ (x_1', x_2', x_3', $\cdots$, x_n'은 음이 아닌 정수)라 하면 주어진 방정식은

$$(x_1'+1)+(x_2'+1)+(x_3'+1)+\cdots+(x_n'+1)=r$$

$$x_1'+x_2'+x_3'+\cdots+x_n'=r-n \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

따라서 구하는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2', x_3', $\cdots$, x_n'의 순서쌍 $(x_1', x_2', x_3', \cdots, x_n')$의 개수와 같으므로 ${}_{n}H_{r-n}$이다.

③ 자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 ${}_{3}H_{n}$이다.

4 이항정리

(1) 이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_{n}C_{0}a^n+{}_{n}C_{1}a^{n-1}b+{}_{n}C_{2}a^{n-2}b^2+\cdots+{}_{n}C_{r}a^{n-r}b^r+\cdots+{}_{n}C_{n}b^n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}{}_{n}C_{r}a^{n-r}b^r$$

이 성립하고 이를 이항정리라고 한다.

또 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수 ${}_{n}C_{0}$, ${}_{n}C_{1}$, ${}_{n}C_{2}$, $\cdots$, ${}_{n}C_{r}$, $\cdots$, ${}_{n}C_{n}$을 이항계수라 하고, ${}_{n}C_{r}a^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

설명 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하고 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 이 항의 계수는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수인 ${}_{n}C_{r}$와 같다.

참고 ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

(2) 이항계수의 성질

자연수 n에 대하여

① ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$

② ${}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+(-1)^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{n}=0$

③ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$ (단, n은 홀수)

${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$ (단, n은 짝수)

설명 $(1+x)^{n}={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}x+{}_{n}\mathrm{C}_{2}x^{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}x^{n}$ …… ㉠

① ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{n}={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}$ …… ㉡

② ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+(-1)^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{n}$ …… ㉢

③ ㉢에서 n이 홀수이면 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}$이고

㉡에서 $({}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1})+({}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n})=2^{n}$이므로

${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$

n이 짝수일 때도 마찬가지로 설명할 수 있다.

(3) 파스칼의 삼각형

$(a+b)^{n}$의 전개식에서 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때, 이항계수를 차례로 배열하여 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다. 이와 같은 이항계수의 배열을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

$$\begin{array}{l|c}
(a+b)^{0} & 1 \\
(a+b)^{1} & {}_{1}\mathrm{C}_{0}\quad {}_{1}\mathrm{C}_{1} \\
(a+b)^{2} & {}_{2}\mathrm{C}_{0}\quad {}_{2}\mathrm{C}_{1}\quad {}_{2}\mathrm{C}_{2} \\
(a+b)^{3} & {}_{3}\mathrm{C}_{0}\quad {}_{3}\mathrm{C}_{1}\quad {}_{3}\mathrm{C}_{2}\quad {}_{3}\mathrm{C}_{3} \\
(a+b)^{4} & {}_{4}\mathrm{C}_{0}\quad {}_{4}\mathrm{C}_{1}\quad {}_{4}\mathrm{C}_{2}\quad {}_{4}\mathrm{C}_{3}\quad {}_{4}\mathrm{C}_{4} \\
(a+b)^{5} & {}_{5}\mathrm{C}_{0}\quad {}_{5}\mathrm{C}_{1}\quad {}_{5}\mathrm{C}_{2}\quad {}_{5}\mathrm{C}_{3}\quad {}_{5}\mathrm{C}_{4}\quad {}_{5}\mathrm{C}_{5} \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1\quad 1 \\
1\quad 2\quad 1 \\
1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
\vdots
\end{array}$$

파스칼의 삼각형에서 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}\ (0\le r\le n)$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\ (1\le r<n)$이 성립함을 확인할 수 있다.

5 분할

(1) 자연수의 분할

자연수 n을 순서를 생각하지 않고 자신보다 크지 않은 몇 개의 자연수 $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_k\ (n\ge n_1\ge n_2\ge n_3\ge\cdots\ge n_k\ge 1$, k는 자연수) 의 합으로

$n=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k$

와 같이 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 한다. 이때 자연수 n을 $k\ (1\le k\le n)$개의 자연수로 분할하는 경우의 수를 기호로 $P(n,\ k)$와 같이 나타낸다.

참고 ① $P(n,\ 1)=1,\ P(n,\ n)=1$

② 자연수 n의 분할의 수는 $P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+P(n,\ 3)+\cdots+P(n,\ n)$

(2) 집합의 분할

원소의 개수가 n인 집합을 공집합이 아닌 몇 개의 서로소인 부분집합의 합집합으로 나타내는 것을 집합의 분할이라고 한다. 이때 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수를 기호로 $S(n,\ k)$와 같이 나타낸다.

참고 ① $S(n,\ 1)=1,\ S(n,\ n)=1$

② $S(n,\ n-1)={}_{n}\mathrm{C}_{2}$

유형 1 순열

출제유형 | 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 서로 다른 대상의 개수 n과 나열하는 개수 r를 파악하여 경우의 수를 구한다.

필수 유형 | 2008학년도 대수능 |

서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 운영하는 어느 수련원이 있다. 이 수련원의 프로그램에 참가한 A와 B가 각각 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하려고 한다. A와 B가 선택하는 2종류의 체험 프로그램 중에서 한 종류만 같은 경우의 수를 구하시오. [4점]

출제 의도

순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라 하자.
A, B가 같이 a를 선택하고 네 종류 b, c, d, e 중 서로 다른 1개씩을 각각 선택하는 경우의 수는 ${}_4P_2$이다.
A, B가 같이 b 또는 c 또는 d 또는 e를 선택하는 경우도 마찬가지이므로 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$5\times{}_4P_2=5\times4\times3=60$

답 60

정답과 풀이 55쪽

01 ◦ 6051-0261

남학생 4명과 여학생 2명을 모두 일렬로 세울 때, 남학생 사이에 여학생 2명이 서로 이웃하여 서는 경우의 수는?

① 128 ② 132 ③ 136
④ 140 ⑤ 144

02 ◦ 6051-0262

1, 2, 3, 4, 5, 6의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택한 후 일렬로 나열하여 네 자리의 자연수 A를 만들고, 나머지 2개의 수를 일렬로 나열하여 두 자리의 자연수 B를 만들려고 한다. $A+B$를 5로 나누었을 때 나머지가 2가 되도록 두 자연수 A, B를 만드는 경우의 수는?

① 136 ② 138 ③ 140
④ 142 ⑤ 144

03 ◦ 6051-0263

5개의 소문자 a, b, c, d, e와 3개의 대문자 A, B, C를 모두 일렬로 나열할 때, '$abAcBdCe$'와 같이 모든 대문자 바로 왼쪽에는 적어도 1개 이상의 소문자가 오도록 나열하는 경우의 수는?

① 7150 ② 7200 ③ 7250
④ 7300 ⑤ 7350

유형 2 중복순열

출제유형 | 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 상황에서 중복을 허락하는지 판단하여 경우의 수를 구한다.

필수 유형

같은 종류의 연필 9개의 일부 또는 전부를 세 학생 A, B, C에게 나누어 주려고 한다. 연필을 받지 못하는 학생은 없고, 한 학생이 받을 수 있는 연필은 3개 이하가 되도록 연필을 나누어 주는 경우의 수는?

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

출제 의도

중복순열을 이용하여 연필을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

세 학생 A, B, C가 모두 1개 이상 3개 이하의 연필을 받는 경우의 수는 숫자 1, 2, 3 중 중복을 허락하여 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

답 ①

04

6051-0264

1, 2, 3, 4, 5의 자연수 중에서 중복을 허락하여 5개의 수를 선택해 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 각 자리의 수 중에서 1이 한 개만 있는 자연수의 개수는?

① 1200 ② 1220 ③ 1240
④ 1260 ⑤ 1280

05

6051-0265

A, B를 포함한 5명에게 서로 다른 과자 6개를 남김없이 나누어 주려고 할 때, A와 B에게는 과자를 한 개씩만 나누어 주는 경우의 수는? (단, 과자를 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 2400 ② 2430 ③ 2460
④ 2490 ⑤ 2520

06

6051-0266

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)\times f(4)$는 홀수이다.
(나) $f(1)+f(2)+f(3)$은 짝수이다.

정답과 풀이 56쪽

유형 3 원순열

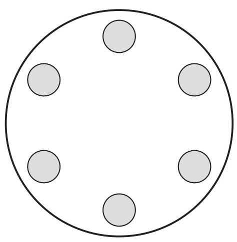
출제유형 | 원형으로 배열할 때 서로 다른 경우의 수나 회전하면 같은 경우가 생기는 순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 순열의 수와 원순열의 수의 관계를 이해하고, 회전하면 같아지는 경우를 찾은 후 원순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 9월 모의평가 |

그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

출제 의도

원순열의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

A와 B를 한 묶음으로 생각하고 나머지 4개의 용기 C, D, E, F를 포함하여 5개의 용기를 원형의 실험 기구에 넣는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)!=4!$

이때 한 묶음으로 된 A와 B의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 구하는 경우의 수는

$4!\times2!=24\times2=48$

답 ②

07

6051-0267

원형의 탁자에 남자 어른 3명, 여자 어른 2명, 어린이 3명이 모두 둘러앉을 때, 어린이 3명은 서로 이웃하여 앉고 여자 어른 2명은 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수를 구하시오.

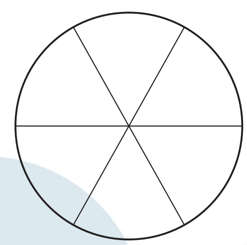
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

08

6051-0268

그림과 같이 원을 같은 모양의 부채꼴 6개로 등분한 후 1부터 6까지의 자연수를 한 번씩 모두 사용하여 각 부채꼴에 하나씩 적을 때, 원의 중심에 대하여 서로 맞은편에 있는 두 부채꼴에 적힌 두 수의 곱이 모두 짝수가 되는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

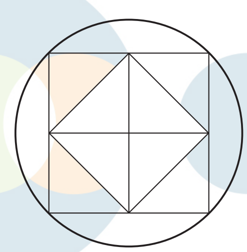


09

6051-0269

그림과 같이 원에 내접하는 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 작은 정사각형을 그리고, 이 작은 정사각형의 두 대각선을 그린 도형이 있다. 원의 내부에 만들어진 12개의 영역에 서로 다른 12가지의 색을 모두 사용하여 색을 칠하려고 한다. 각 영역에는 한 가지 색만을 칠하고, 모든 영역이 구분되도록 칠할 때 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① $\frac{12!}{8}$ ② $\frac{12!}{6}$ ③ $\frac{12!}{4}$ ④ $\frac{12!}{2}$ ⑤ $12!$

정답과 풀이 57쪽

유형 4 같은 것이 있는 순열

출제유형 | 같은 것이 있는 원소들을 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 같은 것의 개수를 조사하여 순열의 수를 구하는 식에 대입하여 경우의 수를 구한다. 또 몇 개의 원소가 특정한 순서가 정해져 있는 경우 이 원소들을 같은 것으로 생각하여 같은 것이 있는 순열을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2011학년도 대수능 |

어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는?

(단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.) [3점]

(가) A는 반드시 설치한다.
(나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75
④ 85 ⑤ 95

출제 의도

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

현수막 B는 2곳 이상 설치해야 하므로 현수막 B를 2곳, 3곳, 4곳에 설치하는 경우로 나누어 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) A 1곳, B 2곳, C 2곳에 설치하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

(ii) A 1곳, B 3곳, C 1곳에 설치하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

(iii) A 1곳, B 4곳에 설치하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{4!}=5$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$30+20+5=55$

답 ①

10 6051-0270

8개의 문자 a, a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하여 만든 문자열 중에서 맨 앞과 맨 뒤에 같은 문자가 나열되는 문자열의 개수는?

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

11 6051-0271

어느 박물관에는 다음 표와 같이 1층에 4개의 전시관, 2층에 3개의 전시관, 3층에 2개의 전시관이 있다.

층	전시관
1층	선사관, 고대관, 중세관, 근세관
2층	테마관, 서화관, 기증관
3층	아시아관, 조각공예관

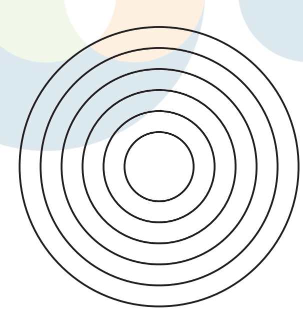
다음 조건을 만족시키도록 전시관을 관람하려고 할 때, 9개의 전시관을 한 번씩 모두 관람하는 경우의 수는?

(가) 2층에 있는 전시관은 연달아 관람을 한다.
(나) 중세관은 근세관보다 먼저 관람을 하고,
아시아관은 근세관보다 나중에 관람을 한다.

① $8!$ ② $3\times7!$ ③ $7!$
④ $3\times6!$ ⑤ $6!$

12 6051-0272

그림과 같이 한 평면에 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6인 6개의 원으로 이루어진 도형이 있다. 반지름의 길이가 가장 큰 원의 내부에 나머지 5개의 원으로 구분된 6개의 영역 중 3개의 영역에는 빨간색, 2개의 영역에는 파란색, 1개의 영역에는 노란색을 사용하여 칠하려고 한다. 각 영역은 한 가지 색만을 칠하고, 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠할 때 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수를 구하시오.



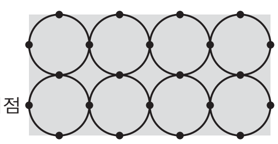
유형 5 같은 것이 있는 순열의 활용

출제유형 | 같은 것이 있는 순열을 이용하여 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 최단 거리로 가는 경로를 직사각형 모양으로 변환한 후 가로, 세로 방향으로 가는 것을 각각 같은 것으로 생각하고, 조건에 따라 중복되지 않으면서 반드시 지나야 하는 지점을 먼저 파악하여 같은 것이 있는 순열을 적용한다.

필수 유형 | 2009학년도 대수능 |

직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다. 이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다.

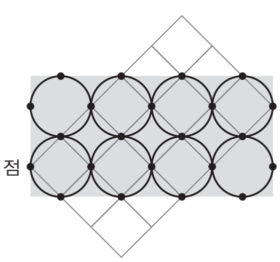


A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 원의 접점을 나타낸다.) [4점]

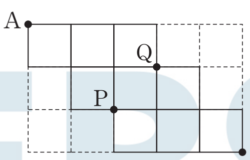
출제 의도

같은 것이 있는 순열을 이용하여 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수는 [그림 2]에서 A 지점에서 출발하여 실선을 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수와 같다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)=4\times5=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

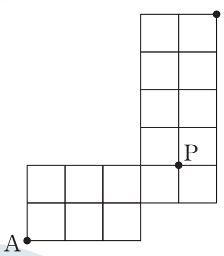
$20+20=40$

답 40

13

6051-0273

그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

14

6051-0274

1부터 15까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 15장의 카드가 그림과 같이 변이 공유되도록 놓여 있다. 15장의 카드 중 서로 다른 6장의 카드를 다음 규칙에 따라 차례대로 선택하는 경우의 수는?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

[규칙 1] 서로 다른 6장의 카드를 차례대로 선택할 때 연속하여 선택되는 두 장의 카드는 항상 카드의 한 변을 서로 공유하고 있어야 한다.

[규칙 2] 차례대로 선택된 6장의 카드에 적혀 있는 수는 점점 커진다.

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

정답과 풀이 58쪽

유형 6 조합

출제유형 | 순열의 수, 조합의 수, 합의 법칙, 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수가 ${}_nC_r$이므로 조건에서 r개를 택할 때 순서를 생각해야 하는지 아닌지 파악해야 한다.

필수 유형

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 A, B는 다음 조건을 만족시킨다. 두 집합 A와 B를 정하는 경우의 수는?

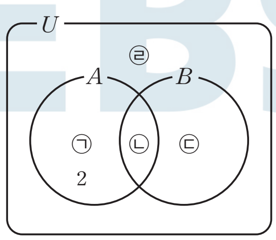
(가) 2는 집합 $A-B$의 원소이다.
(나) $n(A\cap B)=2$

① 54 ② 56 ③ 58
④ 60 ⑤ 62

출제 의도

조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



그림과 같이 집합 $A-B$를 ㉠, 집합 $A\cap B$를 ㉡, 집합 $B-A$를 ㉢, 집합 $(A\cup B)^C$을 ㉣이라 하자.
2는 ㉠의 원소이고 $n(A\cap B)=2$이므로 ㉡의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이고, 나머지 2개의 원소가 ㉠, ㉢, ㉣의 원소가 되는 경우의 수는
${}_3\Pi_2=3^2$
따라서 조건을 만족시키는 두 부분집합 A와 B를 정하는 경우의 수는
${}_4C_2\times3^2=6\times9=54$

답 ①

15 6051-0275

승현이와 주현이를 포함한 6명의 학생을 일렬로 세울 때, 승현이와 주현이는 이웃하지 않고 승현이가 주현이보다 앞에 서게 되는 경우의 수는?

① 230 ② 240 ③ 250
④ 260 ⑤ 270

16 6051-0276

서로 다른 7개의 공을 세 상자 A, B, C에 빈 상자가 없도록 남김없이 나누어 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 620 ② 625 ③ 630
④ 635 ⑤ 640

17 6051-0277

1부터 15까지의 15개의 자연수 중에서 서로 다른 네 수를 선택할 때, 네 수의 합과 곱이 모두 3의 배수인 경우의 수는?

① 340 ② 345 ③ 350
④ 355 ⑤ 360

유형 7 중복조합

출제유형 | 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이므로 문제의 조건에서 중복을 허락하여 택할 수 있는 대상을 먼저 파악해야 한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 9월 모의평가 |

네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 때, 세 수의 곱이 100 이하가 되도록 선택하는 경우의 수는? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

출제 의도

중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

선택하는 세 수의 곱이 100 이하가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 선택하는 세 수 중 8이 없는 경우의 수는 1, 2, 4에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

(ii) 선택하는 세 수 중 8이 1개 있는 경우는 (8, 4, 2), (8, 4, 1), (8, 2, 2), (8, 2, 1), (8, 1, 1)의 5가지이다.

(iii) 선택하는 세 수 중 8이 2개 있는 경우는 (8, 8, 1)의 1가지이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$10+5+1=16$

답 ③

18 6051-0278

같은 종류의 빨간 공 8개를 A, B, C 3명에게 남김없이 나누어 주려고 한다. A, B, C 3명이 각각 적어도 1개의 공을 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

19 6051-0279

$3<a<b\le 9<c\le d<14$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

① 145 ② 150 ③ 155
④ 160 ⑤ 165

20 6051-0280

같은 종류의 연필 6개와 같은 종류의 지우개 2개를 네 상자 A, B, C, D에 빈 상자가 없도록 남김없이 나누어 넣을 때, 그 결과가 서로 다른 경우의 수는?

① 250 ② 260 ③ 270
④ 280 ⑤ 290

정답과 풀이 59쪽

유형 8 **중복조합의 활용**

출제유형 | 중복조합을 활용하여 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n과 r는 자연수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 또는 자연수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 의 개수 또는 함수의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 자연수 n, r에 대하여

(1) 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

(2) 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ $(n\le r)$를 만족시키는 자연수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_{r-n}$ 이다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

출제 의도

중복조합을 활용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+z+w=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $2w=4$, $w=2$

이때 $x+y+z=8$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$$

답 ②

21 6051-0281

방정식 $x+y+z=12$를 만족시키는 2 이상의 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

22 6051-0282

연립방정식

$$\begin{cases} a+b+c+d=9 \\ d-e=3 \end{cases}$$

을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

23 6051-0283

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$
(나) $f(2)+2<f(5)$

함수 f의 개수는?

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

정답과 풀이 60쪽

유형 9 이항정리

출제유형 | 이항정리를 이용하여 주어진 식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | n이 자연수일 때, $(a+b)^n$의 전개식의 일반항 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$에서 문제의 조건을 만족시키는 r의 값을 구하여 특정한 항의 계수를 구한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

다항식 $(x+a)^6$의 전개식에서 x^4의 계수가 60일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$(x+a)^6$의 전개식에서 일반항은 ${}_6C_r a^{6-r}x^r$이다.
x^4항은 $r=4$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_6C_4 a^2 = {}_6C_2 a^2 = \frac{6\times5}{2\times1}\times a^2 = 15a^2$

$15a^2=60$에서 $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

답 ②

24 6051-0284

2 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서 x^{n-2}의 계수를 a_n이라 하자. $a_n<144$를 만족시키는 n의 최댓값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

25 6051-0285

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^5+\left(x+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식에서 x의 계수와 x^2의 계수의 합이 100일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26 6051-0286

다항식 $(x^2+3)^5$을 $(x^2+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

정답과 풀이 60쪽

유형 10 이항계수의 성질

출제유형 | 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$의 전개식에서 얻을 수 있는 이항계수의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수 n에 대하여

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) ${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$ (n은 홀수)

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$ (n은 짝수)

(4) ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1\le r<n$)

필수 유형 | 2010학년도 대수능 6월 모의평가 |

50 이하의 자연수 n 중에서 $\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k$의 값이 3의 배수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

출제 의도

이항계수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$$
$$=({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)-{}_nC_0$$
$$=2^n-1$$

2^n-1이 3의 배수가 되기 위해서는 2^n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 1이어야 한다.

$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ \cdots,\ 2^{49},\ 2^{50}$을 3으로 나누었을 때의 나머지는 각각 $2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots,\ 2,\ 1$이다.

따라서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 $2^2,\ 2^4,\ 2^6,\ \cdots,\ 2^{50}$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 25이다.

답 25

27 6051-0287

$\log_8({}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

28 6051-0288

$A=\sum_{k=1}^{10}{}_{21}C_k,\ B=\sum_{k=1}^{5}{}_{20}C_{2k-1}$일 때, $\frac{A+1}{B}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

29 6051-0289

3 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(1+x^2)^n$의 전개식에서 x^6의 계수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{8}a_n$의 값은?

① 122 ② 124 ③ 126
④ 128 ⑤ 130

유형 11 분할

출제유형 | 자연수의 분할과 집합의 분할 중에서 주어진 조건을 만족시키는 분할의 개수를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법과 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법을 알고 있어야 하며, 각 분할 중에서 주어진 조건을 만족시키는 분할을 찾는다.

필수 유형

자연수 11의 분할 중에서 숫자 3이 두 개 이상 포함된 서로 다른 분할의 수는?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

출제 의도

자연수의 분할 중에서 주어진 조건을 만족시키는 분할의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$11=3+3+5$이므로 숫자 3이 두 개 이상 포함된 자연수 11의 분할은 자연수 5의 각 분할에 $3+3$을 더한 것과 같다.

$5=4+1=3+2$
$\quad=3+1+1=2+2+1$
$\quad=2+1+1+1$
$\quad=1+1+1+1+1$

이므로 숫자 3이 두 개 이상 포함된 자연수 11의 서로 다른 분할의 수는 7이다.

답 ③

30 6051-0290

자연수 12의 분할 중에서 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는?

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

31 6051-0291

같은 종류의 공 10개를 서로 다른 종류의 상자 5개에 빈 상자가 없도록 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 3개 이하의 공이 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 43　② 45　③ 47
④ 49　⑤ 51

32 6051-0292

주현이는 월요일부터 토요일까지 6일 동안 매일 A, B, C, D 네 종류의 운동 중에서 한 종류를 선택하여 운동하는 계획표를 작성하려고 한다. A, B, C, D를 각각 적어도 1일 이상 운동할 수 있도록 작성하는 계획표의 개수는?

① 1488　② 1512　③ 1536
④ 1560　⑤ 1584

33 6051-0293

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: A \longrightarrow A$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 치역의 원소의 최댓값은 3이다.
(나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=9$

함수 f의 개수를 구하시오.

10 확률

1 시행과 사건

(1) **시행** : 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

(2) **사건** : 어떤 시행의 결과로 일어나는 것을 사건이라고 한다.

(3) **표본공간** : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 사건은 표본공간의 부분집합으로 나타낼 수 있다.

(4) **사건 $A\cup B$** : 표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 기호로 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

(5) **사건 $A\cap B$** : 표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 A와 B가 동시에 일어나는 사건을 기호로 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

(6) **배반사건** : 표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, 두 사건 A, B는 서로 배반이라 하고, 이 두 사건을 서로 배반사건이라고 한다.

(7) **여사건** : 표본공간 S의 부분집합인 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.

2 확률의 뜻

(1) **확률** : 어떤 사건에 대하여 그것이 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 확률이라 하고, 사건 A가 일어날 확률을 기호로 $\mathrm{P}(A)$와 같이 나타낸다.

(2) **수학적 확률** : 어떤 시행에서 표본공간 S의 각각의 원소가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 원소의 개수 $n(S)$, 사건 A의 원소의 개수 $n(A)$에 대하여 사건 A가 일어날 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

(3) **통계적 확률** : 일반적으로 어떤 시행을 n회 반복하였을 때, 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라 하자. 이때 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 이 값 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

참고 통계적 확률을 구할 때에는 실제로 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

3 확률의 기본 성질

표본공간 S의 임의의 사건 A와 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 확률의 기본 성질은 다음과 같다.

(1) $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

(2) $\mathrm{P}(S)=1$

(3) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

4 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

5 여사건의 확률

사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$이고, $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$이다.

6 조건부확률과 확률의 곱셈정리

(1) **조건부확률** : 어떤 시행에서 표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$인 사건 A가 일어났다는 가정에서 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B\,|\,A)$와 같이 나타낸다. 즉, 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, }\mathrm{P}(A)>0)$$

(2) **확률의 곱셈정리** : 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\,|\,A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\,|\,B)$$

7 독립사건과 종속사건

(1) **독립사건** : 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고 어느 한 사건이 일어나거나 일어나지 않는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\mathrm{P}(B\,|\,A^C)=\mathrm{P}(B)\ \text{또는}\ \mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A\,|\,B^C)=\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라 하고 서로 독립인 두 사건을 독립사건이라고 한다.

(2) **종속사건** : 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 즉

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)\neq\mathrm{P}(B)\ \text{또는}\ \mathrm{P}(A\,|\,B)\neq\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 종속이라 하고 서로 종속인 두 사건을 종속사건이라고 한다.

(3) **서로 독립일 조건** : 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

(4) 두 사건 A, B가 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$이고 서로 독립이면

A^C과 B, A와 B^C, A^C과 B^C

도 각각 서로 독립이다.

8 독립시행의 확률

(1) **독립시행** : 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않는 경우, 즉 매번 일어나는 사건이 서로 독립인 경우, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) **독립시행의 확률** : 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}\ (\text{단, }r=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n)$$

정답과 풀이 62쪽

유형 1 순열의 수를 이용한 확률

출제유형 | 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구한 후 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 여러 가지 순열의 수를 이용하여 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수와 사건 A가 일어날 수 있는 경우의 수를 구하여 확률 $\mathrm{P}(A)$를 구한다.

필수 유형 | 2011학년도 대수능 |

한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은? [4점]

11	12	13
21	22	23

① $\frac{1}{20}$　② $\frac{1}{10}$　③ $\frac{3}{20}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{4}$

출제 의도

순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

6명의 학생이 자리에 앉는 모든 경우의 수는 $6!$

같은 나라의 두 학생끼리 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되는 경우는 다음의 세 가지이다.

(i) $(11, 21), (12, 22), (13, 23)$

(ii) $(11, 21), (12, 13), (22, 23)$

(iii) $(11, 12), (21, 22), (13, 23)$

(i)에서 세 나라의 학생의 자리를 정하는 경우의 수는 $3!$이고, 각각의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 2^3이다.

따라서 그 경우의 수는 $3! \times 2^3$이다.

(ii), (iii)의 경우도 (i)과 마찬가지로 그 경우의 수는 $3! \times 2^3$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3 \times 3! \times 2^3}{6!} = \frac{3 \times 2^3}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{5}$$

답 ④

01

6051-0294

어느 회사의 면접시험에 응시한 남자 4명과 여자 3명이 모두 한 명씩 차례로 면접시험장에 들어가는 순서를 임의로 정하려고 한다. 면접시험장에 남자와 여자가 번갈아 들어가도록 순서가 정해질 확률은?

① $\frac{3}{35}$　② $\frac{1}{14}$　③ $\frac{2}{35}$　④ $\frac{3}{70}$　⑤ $\frac{1}{35}$

02

6051-0295

세 개의 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자. $ab+bc$가 홀수일 확률은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{7}{27}$　③ $\frac{29}{108}$　④ $\frac{5}{18}$　⑤ $\frac{31}{108}$

03

6051-0296

서로 다른 빨간색 볼펜 3개와 서로 다른 파란색 볼펜 2개가 있다. 이 5개의 볼펜을 A, B를 포함한 5명에게 임의로 1개씩 나누어 줄 때, A, B에게 나누어 주는 볼펜 2개의 색이 서로 다를 확률은?

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{13}{20}$　③ $\frac{7}{10}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{4}{5}$

유형 2 조합의 수를 이용한 확률

출제유형 | 조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구한 후 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 순열과 조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 후 확률을 구한다.

필수 유형

1부터 15까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 15장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑을 때, 뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 세 수 중 3의 배수가 2개일 확률은?

① $\frac{20}{91}$ ② $\frac{22}{91}$ ③ $\frac{24}{91}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{4}{13}$

출제 의도

조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

15장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑는 모든 경우의 수는

${}_{15}\mathrm{C}_3=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$

뽑은 세 장의 카드에 적혀 있는 세 수 중 3의 배수가 2개일 경우의 수는 1부터 15까지의 자연수 중 3의 배수 3, 6, 9, 12, 15에서 서로 다른 두 수를 선택하고, 3의 배수가 아닌 나머지 10개의 수 중 하나를 선택하면 되므로

${}_{5}\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_1=\frac{5\times4}{2\times1}\times10=100$

따라서 구하는 확률은

$\frac{100}{455}=\frac{20}{91}$

답 ①

04

6051-0297

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드 중에서 임의로 4장의 카드를 동시에 선택할 때, 선택한 카드에 적혀 있는 네 수 중 두 수는 6보다 크고 두 수는 5보다 작을 확률은?

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

05

6051-0298

서로 다른 6개의 사탕과 서로 다른 3개의 초콜릿을 임의로 3개씩 묶어 3개의 묶음을 만들 때, 각 묶음에는 적어도 한 개의 사탕이 포함되고 각 묶음에 있는 사탕의 개수가 서로 다를 확률은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

06

6051-0299

주머니 안에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 공에 적혀 있는 수를 확인하고 꺼낸 공을 다시 주머니에 넣는 시행을 5회 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 5개의 수의 곱이 2^6일 확률은?

① $\frac{1}{96}$ ② $\frac{1}{108}$ ③ $\frac{7}{864}$
④ $\frac{1}{144}$ ⑤ $\frac{5}{864}$

확률과 통계

유형 3 확률의 덧셈정리

출제유형 | 사건이 일어나는 경우를 몇 가지로 나누어 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

특히 사건 A와 사건 B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

필수 유형 | 2013학년도 대수능 9월 모의평가 |

주머니 안에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 주머니에서 갑이 2장의 카드를 임의로 뽑고 을이 남은 2장의 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 뽑을 때, 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 을이 뽑은 카드에 적힌 수보다 작을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

출제 의도

확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

갑과 을이 카드를 뽑는 모든 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times2=12$

갑이 뽑은 카드의 수를 (a, b)로 나타내면

(ⅰ) 갑이 뽑은 카드의 수가 $(1, 2)$인 경우
　을이 3 또는 4를 뽑으면 된다.

(ⅱ) 갑이 뽑은 카드의 수가 $(1, 3)$인 경우
　을이 4를 뽑으면 된다.

(ⅲ) 갑이 뽑은 카드의 수가 $(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$ 중 하나인 경우
　을이 어떤 카드를 뽑더라도 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱보다 더 작게 된다.

(ⅰ)인 사건을 A, (ⅱ)인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{1\times2}{12}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1\times1}{12}=\frac{1}{12}$이고 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

답 ③

07

6051-0300

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$3\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{5}{6}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

08

6051-0301

상자 안에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 숫자가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있다. 이 상자에서 임의로 하나씩 4개의 공을 차례로 꺼낼 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c, d라 하자. $a+b+c=d$를 만족시킬 확률은?

(단, 꺼낸 공은 다시 상자에 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{140}$　② $\frac{1}{70}$　③ $\frac{3}{140}$

④ $\frac{1}{35}$　⑤ $\frac{1}{28}$

09

6051-0302

5명의 학생이 A, B, C 세 선택과목 중에서 임의로 각각 한 과목을 선택할 때, 두 과목 A, B만 각각 1명 이상씩 선택할 확률은?

① $\frac{8}{81}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{10}{81}$

④ $\frac{11}{81}$　⑤ $\frac{4}{27}$

유형 4 여사건을 이용한 확률

출제유형 | 여사건을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 사건 A가 일어날 경우의 수보다 여사건 A^C이 일어날 경우의 수를 구하는 것이 간편할 경우에는 $\mathrm{P}(A^C)$을 구하여 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$을 구한다. 특히 '적어도 ~', '많아야 ~', '~ 이상' 등의 표현이 있을 때, 여사건을 이용하면 간편하게 해결되는 경우가 많다.

필수 유형 | 2008학년도 대수능 |

여학생 4명과 남학생 2명이 어느 요양 시설에서 6명 모두가 하루에 한 명씩 6일 동안 봉사 활동을 하려고 한다. 이 6명의 학생이 봉사 활동 순번을 임의로 정할 때, 첫째 날 또는 여섯째 날에 남학생이 봉사 활동을 하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{17}{30}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{19}{30}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

출제 의도

여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

6명의 학생이 6일 동안 봉사 활동을 하게 되는 순번을 정하는 모든 경우의 수는 $6!$이다.
첫째 날 또는 여섯째 날에 남학생이 봉사 활동을 하게 되는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 첫째 날과 여섯째 날에 여학생이 봉사 활동을 하게 되는 사건이다.
4명의 여학생 중 첫째 날과 여섯째 날에 봉사 활동을 하게 되는 여학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$이고, 이 각각에 대하여 나머지 4명의 학생이 둘째 날부터 다섯째 날까지 봉사 활동을 하게 되는 순번을 정하는 경우의 수는 $4!$이므로 첫째 날과 여섯째 날에 여학생이 봉사 활동을 하게 되는 순번을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2\times 4!$이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times 4!}{6!}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times 4!}{6!}$$
$$=1-\frac{2}{5}$$
$$=\frac{3}{5}$$

답 ②

10 6051-0303

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, $4\le a+b\le 10$을 만족시킬 확률은?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

11 6051-0304

빨간색 볼펜 4개, 파란색 볼펜 3개, 검은색 볼펜 1개가 들어 있는 필통이 있다. 이 필통에서 임의로 3개의 볼펜을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 볼펜이 2개 이상 나올 확률은?

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{11}{14}$ ④ $\frac{23}{28}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

12 6051-0305

각 자리의 수가 0이 아닌 세 자리의 자연수 중에서 임의로 한 자연수를 선택할 때, 각 자리의 수의 곱이 8 이상의 짝수일 확률은?

① $\frac{586}{729}$ ② $\frac{196}{243}$ ③ $\frac{590}{729}$ ④ $\frac{592}{729}$ ⑤ $\frac{22}{27}$

정답과 풀이 65쪽

유형 5 조건부확률

출제유형 | 여러 가지 상황에서 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

어느 회사의 직원은 모두 60명이고, 각 직원은 두 개의 부서 A, B 중 한 부서에 속해 있다. 이 회사의 A 부서는 20명, B 부서는 40명의 직원으로 구성되어 있다. 이 회사의 A 부서에 속해 있는 직원의 50%가 여성이다. 이 회사 여성 직원의 60%가 B 부서에 속해 있다. 이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B 부서에 속해 있을 때, 이 직원이 여성일 확률은 p이다. $80p$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B 부서의 직원인 사건을 E, 여성 직원인 사건을 F라 하면 구하는 확률 p는 $\mathrm{P}(F\mid E)$이다.

A 부서의 직원 20명의 50%가 여성이므로 A 부서에 속해 있는 여성 직원은 10명이고, 이 회사 여성 직원의 수를 n이라 하면 B 부서에 속해 있는 여성 직원의 수는 전체 여성 직원의 60%이므로

$n=10+\frac{6}{10}\times n,\ n=25$

따라서 B 부서에 속해 있는 여성 직원은 15명이다.

이 회사의 직원 60명을 두 부서 A, B와 남성, 여성으로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	A 부서	B 부서	계
남성	10	25	35
여성	10	15	25
계	20	40	60

$$p=\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(F\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{15}{60}}{\frac{40}{60}}=\frac{3}{8}$$

따라서 $80p=80\times\frac{3}{8}=30$

답 30

13 ▸ 6051-0306

어느 학교의 학생 70명은 과학전시관과 민속마을로 체험학습을 다녀왔다. 체험학습에 참가한 70명의 학생은 각각 과학전시관과 민속마을 중에서 한 곳을 선택하여 다녀왔고 선택한 장소와 인원수는 다음 표와 같다.

(단위: 명)

	과학전시관	민속마을	계
남학생	14	20	34
여학생	21	15	36
계	35	35	70

체험학습에 참가한 70명 중에서 임의로 선택한 한 학생이 민속마을을 다녀왔을 때, 이 학생이 남학생일 확률은 p이다. $7p$의 값을 구하시오.

14 ▸ 6051-0307

주머니 안에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5개와 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내었더니 모두 홀수가 적혀 있는 공이었을 때, 이 2개의 공의 색깔이 서로 다를 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

15 ▸ 6051-0308

어느 학교의 전체 학생을 대상으로 등교할 때 이용한 모든 교통수단을 조사하였다. 조사에 참여한 학생 중 지하철을 이용한 학생의 수는 버스를 이용한 학생의 수의 $\frac{7}{8}$이었다. 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 지하철을 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 버스도 이용하여 등교한 학생일 확률이 $\frac{5}{7}$이다. 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 버스를 이용하여 등교하였을 때, 이 학생이 지하철도 이용하여 등교한 학생일 확률은? (단, 조사에 참여한 학생 중에는 버스와 지하철을 모두 이용하거나 모두 이용하지 않는 학생이 있을 수 있다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

유형 6 곱셈정리를 이용한 확률의 계산

출제유형 | 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)$

(2) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

필수 유형 | 2012학년도 대수능 |

두 사건 A와 B는 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\mid B)=\frac{3}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

출제 의도

두 사건이 서로 독립일 때, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{3}{8}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)$

$\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{5}\right)\\&=\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

답 ⑤

16

6051-0309

두 사건 A와 B는 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

17

6051-0310

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\mid B)=\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)\mathrm{P}(A)$의 값은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

18

6051-0311

두 사건 A와 B는 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A^C\mid B)\mathrm{P}(B^C\mid A)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

확률과 통계

정답과 풀이 66쪽

유형 7 확률의 곱셈정리의 활용

출제유형 | 확률의 곱셈정리를 이용하여 두 사건이 동시에 일어날 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)$

(2) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

필수 유형 | 2012학년도 대수능 9월 모의평가 |

주사위를 1개 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수이면 동전을 3개 동시에 던지고, 6의 약수가 아니면 동전을 2개 동시에 던진다. 1개의 주사위를 1번 던진 후 그 결과에 따라 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

출제 의도

확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주사위를 1개 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 사건을 E, 주사위의 결과에 따라 동전을 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수가 1인 사건을 F라 하자.

(ⅰ) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 경우

$\mathrm{P}(E)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

동전 3개를 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수가 1인 경우의 수는 3이므로

$\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{3}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

(ⅱ) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수가 아닌 경우

$\mathrm{P}(E^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

동전 2개를 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수가 1인 경우의 수는 2이므로

$\mathrm{P}(F\mid E^C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(E^C\cap F)=\mathrm{P}(E^C)\mathrm{P}(F\mid E^C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F)=\mathrm{P}(E\cap F)+\mathrm{P}(E^C\cap F)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

답 ③

19

6051-0312

갑이 동전 1개를 던져 앞면이 나오면 을은 1개의 주사위를 2번 던지고, 갑이 동전 1개를 던져 뒷면이 나오면 을은 1개의 주사위를 3번 던질 때, 을이 주사위를 던져 나온 눈의 수의 합이 5일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{7}{72}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{5}{72}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

20

6051-0313

주머니에 검은 공 4개와 흰 공 6개가 들어 있다. 이 주머니에서 갑이 먼저 임의로 공 3개를 동시에 꺼낸 후 을이 주머니에 남은 공 중 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 갑이 꺼낸 흰 공의 개수가 을이 꺼낸 흰 공의 개수의 두 배일 확률은?

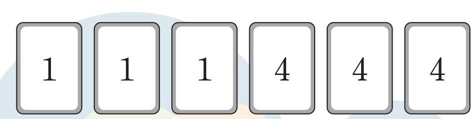
(단, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{4}{35}$ ③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{6}{35}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

21

6051-0314

앞면에는 숫자 1, 뒷면에는 숫자 4가 적혀 있는 6장의 카드가 그림과 같이 숫자 1과 4가 적혀 있는 면이 각각 3장씩 보이도록 일렬로 놓여 있다.



6장의 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 동시에 뒤집는 것을 1회의 시행이라 하자. 이 시행을 2회 반복한 후 카드의 보이는 면에 적혀 있는 수의 합이 21일 확률은?

① $\frac{13}{50}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{11}{50}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{9}{50}$

정답과 풀이 67쪽

유형 8 독립시행의 확률

출제유형 | 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$_{n}C_{r}\,p^{r}(1-p)^{n-r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던지는 시행을 8회 반복할 때, 주사위의 3 이상의 눈이 나오는 횟수를 a, 동전의 앞면이 나오는 횟수를 b라 하자. $a^2+b^2=5$를 만족시킬 확률은 $\dfrac{p}{q\times3^7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

출제 의도

독립시행의 확률과 확률의 덧셈정리, 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주사위의 눈 중 3 이상의 눈은 3, 4, 5, 6이므로 주사위 1개를 던질 때, 3 이상의 눈이 나올 확률은

$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

또 동전 1개를 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이다.

$a^2+b^2=5$를 만족시키는 0 이상의 두 정수 a, b는 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$일 때이다.

(i) $a=1$, $b=2$인 경우

주사위의 3 이상의 눈이 1회, 동전의 앞면이 2회 나올 확률은

$_{8}C_{1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{7}\times{}_{8}C_{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6}=\dfrac{16}{3^8}\times\dfrac{28}{2^8}$

(ii) $a=2$, $b=1$인 경우

주사위의 3 이상의 눈이 2회, 동전의 앞면이 1회 나올 확률은

$_{8}C_{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{6}\times{}_{8}C_{1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7}=\dfrac{28\times4}{3^8}\times\dfrac{8}{2^8}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{16}{3^8}\times\dfrac{28}{2^8}+\dfrac{28\times4}{3^8}\times\dfrac{8}{2^8}=\dfrac{28\times16\times3}{2^8\times3^8}=\dfrac{7}{4\times3^7}$

따라서 $p=7$, $q=4$이므로 $p+q=11$

답 11

22

6051-0315

1개의 주사위를 3번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수가 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수보다 클 확률은?

① $\dfrac{19}{27}$ ② $\dfrac{20}{27}$ ③ $\dfrac{7}{9}$ ④ $\dfrac{22}{27}$ ⑤ $\dfrac{23}{27}$

23

6051-0316

주머니에 빨간 구슬 3개와 파란 구슬 2개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬 중에서 빨간 구슬의 개수를 다음과 같은 표에 기록하고 꺼낸 구슬을 다시 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 6회 반복할 때, 첫 번째 시행부터 여섯 번째 시행까지 표에 기록된 수의 합이 16일 확률은 $\dfrac{n}{5^5}$이다. 자연수 n의 값을 구하시오.

시행	첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째	다섯 번째	여섯 번째
빨간 구슬의 개수						

24

6051-0317

좌표평면 위에 두 점 P, Q가 있다. 주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던지는 시행에서 주사위의 짝수의 눈이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, 홀수의 눈이 나오면 점 P를 y축의 방향으로 1만큼 이동하고, 동전의 앞면이 나오면 점 Q를 x축의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 점 Q를 y축의 방향으로 -1만큼 이동한다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때, 점 $(1, 1)$에서 출발한 점 P와 점 $(0, 4)$에서 출발한 점 Q가 같은 점에 도착할 확률은 p이다. $2^{10}p$의 값을 구하시오.

11 통계

1 이산확률분포

(1) 이산확률변수

확률변수 X가 가지는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있을 때, X를 이산확률변수라고 한다.

(2) 확률질량함수와 이산확률분포

이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$이고, X가 그 값을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$일 때, 이 확률분포를 나타내는 함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$을 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다. 이때 이 확률분포를 이산확률분포라고 한다.

(3) 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $0\le p_i\le 1$ (단, $i=1, 2, 3, \cdots, n$)

② $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

③ $\mathrm{P}(X=x_i$ 또는 $X=x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_j)=p_i+p_j$ (단, $i\ne j$)

④ $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_{i+1})+\mathrm{P}(X=x_{i+2})+\cdots+\mathrm{P}(X=x_j)$

$=p_i+p_{i+1}+p_{i+2}+\cdots+p_j=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i, j=1, 2, 3, \cdots, n$이고, $i\le j$)

(4) 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, X의 평균, 분산, 표준편차는 각각 다음과 같다.

① 평균(기댓값) : $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

② 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

③ 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

(5) 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 임의의 상수 $a, b\ (a\ne 0)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

(6) 이항분포

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p, 일어나지 않을 확률을 $q\ (q=1-p)$라 하고, n회의 독립시행 중 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 X는 $0, 1, 2, \cdots, n$의 값을 가지는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\ (x=0, 1, 2, 3, \cdots, n)$$

이다. 이와 같은 이산확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n, p)$와 같이 나타낸다.

(7) 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, X의 평균, 분산, 표준편차는 각각 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

① $\mathrm{E}(X)=np$

② $\mathrm{V}(X)=npq$

③ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

2 연속확률분포

(1) 연속확률변수

확률변수 X가 시간, 길이, 무게, 온도 등과 같이 어떤 구간에 속하는 모든 실수 값을 가질 수 있을 때, X를 연속확률변수라고 한다.

(2) 확률밀도함수

닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 함수 $f(x)$가 다음과 같은 성질을 가질 때, $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

① $f(x) \geq 0$ (단, $\alpha \leq x \leq \beta$)

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

③ $\mathrm{P}(a \leq X \leq b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
(단, $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)

(3) 정규분포

두 상수 m, $\sigma\ (\sigma > 0)$에 대하여 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty,\ e=2.718\cdots \text{인 무리수})$$

로 주어질 때, 확률변수 X는 정규분포를 따른다고 하고, 함수 $f(x)$의 그래프를 정규분포곡선이라고 한다. 이때 확률변수 X의 평균과 표준편차는 각각 m, σ이고, 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타낸다.
또한 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(4) 표준정규분포

평균이 0이고, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}(0, 1)$과 같이 나타낸다.

(5) 확률변수의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 이때

$\mathrm{P}(a \leq X \leq b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$이다.

(6) 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다.

이때 $\mathrm{P}(a \leq X \leq b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$이다. (단, $q=1-p$)

참고 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$에서 $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$이면 n이 충분히 큰 것으로 생각한다.

3 통계적 추정

(1) 모집단과 표본

표본조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 조사를 위하여 모집단에서 뽑은 일부분을 표본이라고 한다.

(2) 모평균과 표본평균

모집단의 어떤 특성을 나타내는 확률변수 X의 평균 m, 분산 σ^2, 표준편차 σ를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라고 한다.
모집단에서 크기가 n인 표본 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n을 임의추출할 때

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

를 표본평균이라 하고, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$　② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(3) 표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때

① 모집단에서 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

② 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(4) 모평균의 추정

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x}$이면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%, 99%의 신뢰구간은 각각 다음과 같다.

① 신뢰도 95% : $\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99% : $\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

참고 표본의 크기 n이 충분히 크면 모표준편차 σ는 표본표준편차 s로 대신할 수 있다.

(5) 표본비율의 평균, 분산, 표준편차

크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라 할 때, 그 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$이고, 모비율이 p이고 표본의 크기가 n일 때, 표본비율 $\hat{p}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

① $\mathrm{E}(\hat{p})=p$　② $\mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{pq}{n}$　③ $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

(6) 표본비율의 분포

모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$를 따르고 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. (단, $q=1-p$)

(7) 모비율의 추정

모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율을 $\hat{p}$이라 할 때, n이 충분히 크면 모비율 p에 대한 신뢰도 95%, 99%의 신뢰구간은 각각 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

① 신뢰도 95% : $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

② 신뢰도 99% : $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

유형 1 이산확률변수와 확률질량함수

출제유형 | 이산확률변수와 확률질량함수를 이해하여 확률을 구하거나 주어진 확률분포표를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X의 확률질량함수가
$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

(1) $0 \le p_i \le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

(3) $\mathrm{P}(X=x_i$ 또는 $X=x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_j)$
$=p_i+p_j$ (단, $i \ne j$)

필수 유형 | 2010학년도 대수능 9월 모의평가 |

한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.
(나) 두 번째 시행부터
 (1) 뒷면이 나오면 ○를 표시하고,
 (2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ○, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	△	○	△	○	○

한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 △의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{32}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{17}{32}$
④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

출제 의도

주어진 이산확률변수의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

한 개의 동전을 5번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $2^5=32$
△가 2번 표시되는 경우는 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 앞면이 2번 나오는 경우
∨뒷면∨뒷면∨뒷면∨ : 왼쪽의 네 ∨ 중에서 두 ∨을 고르는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

(ii) 앞면이 3번 나오는 경우
∨뒷면∨뒷면∨ : 왼쪽의 세 ∨ 중에서 두 ∨을 고르는 경우의 수와 앞면 3번을 두 그룹으로 쪼개는 경우의 수의 곱과 같으므로
${}_3\mathrm{C}_2\times 2=6$

(iii) 앞면이 4번 나오는 경우
∨뒷면∨ : 왼쪽의 두 ∨ 중에서 두 ∨을 고르는 경우의 수와 앞면 4번을 두 그룹으로 쪼개는 경우의 수의 곱과 같으므로
${}_2\mathrm{C}_2\times 3=3$

따라서 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{6+6+3}{32}=\frac{15}{32}$

답 ②

01 ▸ 6051-0318

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{a}{5}$	1

$\mathrm{P}(X\le 2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

02 ▸ 6051-0319

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	1

$\frac{p_1+p_3}{2}=p_2$가 성립할 때, p_2의 값은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

확률과 통계

정답과 풀이 68쪽

03

6051-0320

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{2a}{(k-1)(k+1)}\ (k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 7)$$

일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{56}{69}$ ② $\frac{19}{23}$ ③ $\frac{58}{69}$
④ $\frac{59}{69}$ ⑤ $\frac{20}{23}$

04

6051-0321

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 카드 6장이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 숫자를 확인한 후 주머니에 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 처음으로 소수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 때까지의 시행 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X\geq 3)$의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

05

6051-0322

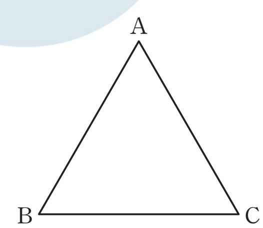
검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 n개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 흰 바둑돌의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X\leq 1)=\frac{6}{7}$일 때, n의 값은? (단, n은 2 이상의 자연수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

06

6051-0323

그림과 같이 정삼각형 ABC가 있다. 이 정삼각형의 각 변마다 빨간색, 파란색, 노란색 중에서 임의로 한 가지 색을 선택하여 칠하려고 한다. 빨간색으로 칠해진 변의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X=2)$의 값은? (단, 한 변에는 한 가지 색만 칠한다.)



① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{4}{27}$
④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

유형 2 이산확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 이산확률변수의 확률분포를 나타내는 표나 관계식을 이용하여 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X의 확률질량함수가
$P(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

(1) 평균 : $E(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

(2) 분산 : $V(X)=E((X-m)^2)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

(3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

필수 유형 | 2011학년도 대수능 |

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$P(X=x)$	$\frac{3-a}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3+a}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$P(0\le X\le 2)=\frac{7}{8}$일 때, 확률변수 X의 평균 $E(X)$의 값은?

[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

출제 의도

확률질량함수의 성질을 이용하여 주어진 표를 완성하고 확률변수의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$P(0\le X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{7}{8}$이므로

$P(X=-1)=1-P(0\le X\le 2)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$

주어진 표에서 $P(X=-1)=\frac{3-a}{8}$이므로

$\frac{3-a}{8}=\frac{1}{8}$, $a=2$

따라서 $E(X)=-1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

답 ⑤

07 6051-0324

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	5	10	계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{5}$	b	1

$E(X)=\frac{9}{2}$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

08 6051-0325

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)=\frac{x^2}{k}\ (x=1, 2, 3, \cdots, 10)$$

일 때, $E(X)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{47}{7}$ ② 7 ③ $\frac{51}{7}$
④ $\frac{53}{7}$ ⑤ $\frac{55}{7}$

정답과 풀이 69쪽

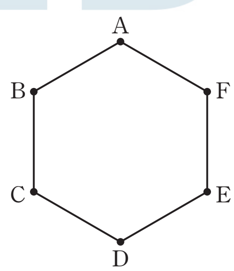
09 ▸ 6051-0326

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 -2, -1, 1, 2이고 $\mathrm{P}(X=-x)=\mathrm{P}(X=x)$ $(x=1,\ 2)$가 성립한다. $\mathrm{V}(X)=2$일 때, $\mathrm{P}(|X|\le 1)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{5}{9}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{7}{9}$

10 ▸ 6051-0327

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 네 점을 선택하여 사각형을 만들 때, 그 사각형의 넓이를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?



① $\frac{17\sqrt{3}}{5}$　② $\frac{18\sqrt{3}}{5}$　③ $\frac{19\sqrt{3}}{5}$　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $\frac{21\sqrt{3}}{5}$

11 ▸ 6051-0328

주머니 안에 숫자 1이 적혀 있는 흰 공 3개, 숫자 -1이 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 1　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{7}{5}$　④ $\frac{8}{5}$　⑤ $\frac{9}{5}$

12 ▸ 6051-0329

1 또는 2 중 하나의 숫자가 적혀 있는 카드 10장이 있다. 이 10장의 카드 중에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 표준편차가 $\frac{3}{10}$이 되도록 하는 숫자 1이 적혀 있는 카드의 개수의 최댓값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

유형 3 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한 후 임의의 상수 a, b에 대하여 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X와 임의의 상수 a, b $(a\neq 0)$에 대하여 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-5	0	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

$\mathrm{E}(4X+3)$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

확률분포가 표로 주어진 이산확률변수의 평균을 이용하여 $\mathrm{E}(4X+3)$의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이산확률변수 X의 확률분포표에서

$\mathrm{E}(X)=-5\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}+5\times\frac{3}{5}$

$=-1+3=2$

따라서 $\mathrm{E}(4X+3)=4\mathrm{E}(X)+3=4\times 2+3=11$

답 11

13 6051-0330

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같을 때, $\mathrm{V}(2X+3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$2a$	a	$\frac{1}{6}$	1

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

14 6051-0331

이산확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(2X+3)=15,\ \sigma(4X+3)=20$

일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

① 57 ② 58 ③ 59 ④ 60 ⑤ 61

15 6051-0332

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하자. 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 서로 다른 실근의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(9X+5)$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

16

6051-0333

어느 수학 동아리는 1학년 남학생 2명, 여학생 4명과 2학년 남학생 3명, 여학생 1명으로 구성되어 있다. 이 수학 동아리 회원 10명 중에서 임의로 2명을 동시에 선택할 때, 선택된 학생 중에서 2학년 남학생의 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(\sqrt{75}X+1)$의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

17

6051-0334

집합 $A=\{-1, 0, 1\}$에서 집합 A로의 함수 전체의 집합을 S라 하자. 집합 S에서 임의로 선택한 한 원소인 함수를 f라 할 때, $f(-1)+f(0)+f(1)$의 값을 확률변수 X라 하자. $\sigma(2X-1)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

유형 4 이항분포

출제유형 | 이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구하거나 평균, 분산, 표준편차의 관계식을 이용하여 독립시행의 횟수나 확률을 구하는 유형의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때
(1) $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, n$, $q=1-p$)
(2) $\mathrm{E}(X)=np$
(3) $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)
(4) $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(3X)=40$일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 계산하고, 분산의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

$$\mathrm{V}(3X)=9\mathrm{V}(X)=9\times\frac{2}{9}n=2n$$

이므로 $2n=40$에서

$n=20$

답 20

18 6051-0335

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{8}\right)$을 따르고, $\mathrm{V}(X)=15$이다. $\mathrm{E}(X+n)$의 값은?

① 86 ② 88 ③ 90
④ 92 ⑤ 94

19 6051-0336

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(11, \frac{1}{2}\right)$을 따르고 $\mathrm{P}(X \le k)=\frac{1}{2}$이다. 자연수 k의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

20 6051-0337

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{10-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\mathrm{V}(\sqrt{2}X)$일 때, $\mathrm{P}(X \ge 9)$의 값은? (단, $0<p<1$)

① $\frac{10}{3^{10}}$ ② $\frac{11}{3^{10}}$ ③ $\frac{9}{2^{10}}$
④ $\frac{11}{2^{10}}$ ⑤ $\frac{13}{2^{10}}$

21 6051-0338

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 180회 반복할 때, 두 주사위에서 나온 눈의 수의 합이 10 이상이 되는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\sigma(X)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

22 6051-0339

어느 도시에서 스마트폰을 사용하는 사람 중 A 회사 제품의 스마트폰을 사용하는 사람의 비율은 0.55이었다. 이 도시에서 스마트폰을 사용하는 사람 중 100명을 임의추출하여 사용하는 스마트폰을 조사하였을 때, A 회사 제품의 스마트폰을 사용하는 사람의 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(2X+3)$의 값은?
(단, 스마트폰을 사용하는 사람은 한 대의 스마트폰을 사용한다.)

① 93 ② 96 ③ 99
④ 102 ⑤ 105

23 6051-0340

어느 지역에 있는 단풍나무의 단풍 색을 조사한 것을 표로 나타내면 다음과 같다.

단풍 색	갈색	적색	황색	기타
비율	0.15	0.35	0.4	0.1

이 지역에 있는 단풍나무 중에서 100그루를 임의추출하여 단풍나무의 단풍 색을 조사하였을 때, 단풍 색이 황색인 단풍나무의 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?
(단, 한 그루의 단풍나무는 한 가지 색의 단풍 색을 갖는다.)

① 1584 ② 1594 ③ 1604
④ 1614 ⑤ 1624

확률과 통계

유형 5 연속확률변수와 확률밀도함수

출제유형 | 확률밀도함수의 그래프나 관계식을 이용하여 미지수를 구하거나 연속확률변수의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때

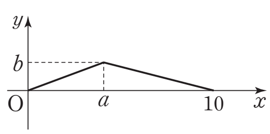
(1) $f(x) \geq 0$ (단, $\alpha \leq x \leq \beta$)

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) $P(a \leq X \leq b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)

필수 유형 | 2014학년도 대수능 예비시행 |

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 10$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$P(0 \leq X \leq a)=\frac{2}{5}$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{21}{5}$ ② $\frac{22}{5}$ ③ $\frac{23}{5}$
④ $\frac{24}{5}$ ⑤ 5

출제 의도

확률밀도함수의 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자.
확률밀도함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 10 \times b=1$

따라서 $b=\frac{1}{5}$

$P(0 \leq X \leq a)=\frac{2}{5}$에서

$\frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{5}=\frac{2}{5}$이므로 $a=4$

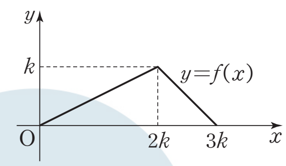
따라서 $a+b=4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$

답 ①

24

6051-0341

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 3k$이고, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$P(0 \leq X \leq k^2)$의 값은? (단, $k>0$)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

25

6051-0342

닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ax & (0 \leq x \leq 1) \\ a(2-x) & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

일 때, $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{7}{4}\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $\frac{13}{16}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

26

6051-0343

닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.

(나) $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right)=2P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$

$P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

유형 6 정규분포와 표준정규분포

출제유형 | 정규분포와 표준정규분포의 성질을 이해하고 정규분포를 나타내는 확률밀도함수의 그래프의 성질과 확률변수의 표준화를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.
(2) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 이때
$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\le Z\le \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$이다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

어느 쌀 모으기 행사에 참여한 각 학생이 기부한 쌀의 무게는 평균이 1.5 kg, 표준편차가 0.2 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 행사에 참여한 학생 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 학생이 기부한 쌀의 무게가 1.3 kg 이상이고 1.8 kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599

① 0.8543 ② 0.8012 ③ 0.7745
④ 0.7357 ⑤ 0.6826

출제 의도

정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1.5, 0.2^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\dfrac{X-1.5}{0.2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(1.3\le X\le 1.8)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{1.3-1.5}{0.2}\le Z\le \dfrac{1.8-1.5}{0.2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.3413+0.4332$
$=0.7745$

답 ③

27

6051-0344

두 확률변수 X와 Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20, 2^2)$, $\mathrm{N}(m, 8^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m-8\le X\le 20)=\mathrm{P}(m\le Y\le 37)$

일 때, m의 값은? (단, $m\le 28$)

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

28

6051-0345

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X\le 99)=0.9332$
(나) $\mathrm{P}(X\le 77)=\mathrm{P}(X\ge 103)$

σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

29

6051-0346

어느 지역에 거주하는 각 사람들이 지난 일주일 동안 모바일 인터넷을 이용한 시간은 평균이 220분, 표준편차가 30분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에 거주하는 사람들 중 임의로 선택한 한 사람이 지난 일주일 동안 모바일 인터넷을 이용한 시간이 190분 이상 265분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6687 ③ 0.6826
④ 0.7745 ⑤ 0.8664

30

6051-0347

어느 무인항공기를 만드는 회사에서 생산되는 드론이 한 번 충전으로 비행할 수 있는 시간은 평균이 20분, 표준편차가 2분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 드론 한 대를 임의로 선택할 때, 이 드론이 한 번 충전으로 비행할 수 있는 시간이 t분 이상일 확률이 0.9332이다. t의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

31

6051-0348

어느 공무원 채용 1차 필기시험에 응시한 10000명의 각 수험생들의 점수는 평균이 75점, 표준편차가 4점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공무원 채용 1차 필기시험에서 668명이 합격했을 때, 이 공무원 채용 1차 필기시험에 응시한 한 수험생이 1차 필기시험에 합격하기 위한 점수를 k점이라 하자. k의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 79　② 81　③ 83　④ 85　⑤ 87

유형 7 이항분포와 정규분포의 관계

출제유형 | 이항분포에서 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 이항분포가 근사적으로 정규분포를 따름을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $N(np, npq)$를 따르며

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

가 성립한다. (단, $q=1-p$)

필수 유형

어느 고등학교 학생 중에서 지난 6개월 동안 2권 이상의 책을 읽은 학생의 비율이 0.6이라 한다. 이 고등학교에서 학생 150명을 임의추출할 때, 지난 6개월 동안 2권 이상의 책을 읽은 학생이 102명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228　② 0.0668　③ 0.1336　④ 0.1587　⑤ 0.3085

출제 의도

이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 주어진 확률변수가 어떤 정규분포를 따르는지 구하고 이를 표준화하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이 고등학교 학생이 지난 6개월 동안 2권 이상의 책을 읽었을 확률이 $0.6=\frac{3}{5}$이므로 임의추출한 학생 150명 중에서 지난 6개월 동안 2권 이상의 책을 읽은 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

이때 150은 충분히 큰 수이고

$E(X)=150\times\frac{3}{5}=90$, $V(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\frac{X-90}{6}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned} P(X \ge 102) &= P\left(Z \ge \frac{102-90}{6}\right) \\ &= P(Z \ge 2) \\ &= 0.5 - P(0 \le Z \le 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

답 ①

32

6051-0349

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(100, p)$를 따르고 $\mathrm{P}(X \geq 25) = 0.5$를 만족시킬 때, p의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

33

6051-0350

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(288, \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X \leq 112)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.4332 ② 0.6915 ③ 0.8413
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

34

6051-0351

어느 지역 학생 중에서 지난 한 달 동안 수영장에 가본 학생의 비율이 0.2라 한다. 이 지역 학생 중에서 225명을 임의추출할 때, 지난 한 달 동안 수영장에 가본 학생이 36명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.2183 ⑤ 0.3085

유형 8 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 모집단의 확률분포와 표본평균의 확률분포 사이의 관계를 이해하고, 표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $\mathrm{E}(\overline{X}) = m$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

모표준편차가 14인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\sigma(\overline{X}) = 2$일 때, n의 값은? [3점]

① 9 ② 16 ③ 25
④ 36 ⑤ 49

출제 의도

모표준편차와 표본표준편차의 관계를 이용하여 표본의 크기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

모집단의 확률변수를 X라 하면

$\sigma(X) = 14$이므로

$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{n}} = 2$

$\sqrt{n} = 7$

따라서 $n = 49$

답 ⑤

정답과 풀이 75쪽

35

6051-0352

모표준편차가 5인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(2\overline{X}+n)=1$일 때, n의 값은?

① 49 ② 64 ③ 81
④ 100 ⑤ 121

36

6051-0353

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	3	6	12	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{12}$	1

이 모집단에서 크기가 6인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11
④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

37

6051-0354

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{2-x^2}{4}\ (x=-1,\ 0,\ 1)$$

인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(4\overline{X})=1$일 때, n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

38

6051-0355

어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=4)$의 값은?

① $\frac{3}{25}$ ② $\frac{16}{125}$ ③ $\frac{17}{125}$
④ $\frac{18}{125}$ ⑤ $\frac{19}{125}$

39

6051-0356

주머니 속에 숫자 3이 하나씩 적혀 있는 구슬 10개와 6 또는 9 중 하나의 숫자가 적혀 있는 구슬 10개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 구슬을 꺼내 구슬에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 2회 반복할 때, 꺼낸 구슬에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=6)=\frac{17}{50}$일 때, 숫자 6이 적혀 있는 구슬의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 9 표본평균 $\overline{X}$의 분포

출제유형 | 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 경우는 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모집단이 정규분포를 따르지 않더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 |

어느 약품 회사가 생산하는 약품 1병의 용량은 평균이 m, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사가 생산한 약품 중에서 임의로 추출한 25병의 용량의 표본평균이 2000 이상일 확률이 0.9772일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 용량의 단위는 mL이다.) [3점]

z	$P(0\le Z\le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 2003 ② 2004 ③ 2005
④ 2006 ⑤ 2007

출제 의도

모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본의 표본평균은 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 m의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이 회사가 생산하는 약품 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따른다.

확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{2}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge 2000)=P\left(Z\ge \frac{2000-m}{2}\right)=0.9772$

주어진 표준정규분포표에서

$P(Z\ge -2)=0.5+P(0\le Z\le 2)=0.9772$이므로

$\frac{2000-m}{2}=-2$

따라서 $m=2004$

답 ②

40 ◦ 6051-0357

정규분포 $N(81, n^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(73\le \overline{X}\le 89)\le 0.9544$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

41 ◦ 6051-0358

모집단의 확률변수 X는 정규분포 $N(n, \sigma^2)$을 따르고, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 n^2인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, σ는 양수이고, n은 자연수이다.)

보기

ㄱ. $E(X)=E(\overline{X})$
ㄴ. $\sigma(X)=\sigma(\overline{X})$
ㄷ. $P(X\ge n-\sigma)=P(n\overline{X}\le n^2+\sigma)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

42 ◦ 6051-0359

어느 공항을 이용하는 각 손님들의 여행용 가방의 무게는 평균이 18 kg, 표준편차가 2 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공항을 이용하는 손님들 중에서 임의추출한 16명의 여행용 가방의 무게의 표본평균이 17.5 kg 이상 19 kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 각 손님들은 오직 1개의 여행용 가방을 가지고 있다.)

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6687 ② 0.6826 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.8664

43

6051-0360

어느 농산물 시장에서 판매하는 체리 1개의 무게는 평균이 m g 이고 표준편차가 2 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농산물 시장에서 판매한 체리 1상자에는 임의추출한 체리 25개가 들어 있다. 이 체리 1상자의 무게가 270 g 이상일 확률이 0.0228일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 상자의 무게는 고려하지 않는다.)

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 9.6　② 10　③ 10.4　④ 10.8　⑤ 11.2

44

6051-0361

어느 회사에서 생산하는 머리염색약의 염색 시간은 평균이 33분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 머리염색약 중에서 임의추출한 n개의 머리염색약의 염색 시간의 표본평균이 32분 이상 34분 이하일 확률이 0.6826이 되도록 하는 자연수 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 25　② 36　③ 49　④ 64　⑤ 81

유형 10 모평균의 추정

출제유형 | 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출하여 구한 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 문제나 신뢰구간을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%와 99%의 신뢰구간은 각각 다음과 같다.

(1) 신뢰도 95% : $\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99% : $\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

필수 유형　| 2012학년도 대수능 |

어느 회사에서 생산하는 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량은 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 음료수 16병을 임의추출하여 칼슘 함유량을 측정한 결과 표본평균이 12.34이었다. 이 회사에서 생산한 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량의 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $11.36 \le m \le a$일 때, $a+\sigma$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $P(0 \le Z \le 1.96)=0.4750$이고, 칼슘 함유량의 단위는 mg이다.) [3점]

① 14.32　② 14.82　③ 15.32　④ 15.82　⑤ 16.32

출제 의도

정규분포를 따르는 모집단에서 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

표본평균 $\bar{x}=12.34$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기 $n=16$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$12.34-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 12.34+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

주어진 신뢰구간이 $11.36 \le m \le a$이므로

$12.34-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=11.36$에서

$0.49\sigma=0.98$

따라서 $\sigma=2$

또한 $a=12.34+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}=13.32$이므로

$a+\sigma=13.32+2=15.32$

답 ③

45

6051-0362

모분산이 100인 정규분포를 따르는 어떤 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 100이었다. 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① $99.04 \leq m \leq 100.96$
② $98.64 \leq m \leq 101.36$
③ $98.26 \leq m \leq 101.74$
④ $98.04 \leq m \leq 101.96$
⑤ $97.96 \leq m \leq 102.04$

46

6051-0363

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본표준편차가 20이었다. 모평균 m을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$일 때, $b-a \leq 2.58$이 되도록 하는 n의 최솟값은? (단, n은 충분히 큰 수이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① 400 ② 900 ③ 1600
④ 2500 ⑤ 3600

47

6051-0364

정규분포 $\mathrm{N}(m, 10^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{x}$라 하자. 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정하려 할 때, $|\bar{x}-m| \leq 2$가 되도록 하는 n의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① 93 ② 95 ③ 97
④ 99 ⑤ 101

48

6051-0365

어느 광역버스를 이용하는 각 손님들의 광역버스 하루 이용 시간은 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 광역버스를 이용하는 손님 중에서 100명을 임의추출하여 조사하였더니 광역버스 하루 이용 시간의 평균이 60분이었다. 이 광역버스를 이용하는 손님들 전체의 광역버스 하루 이용 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① $56.08 \leq m \leq 63.92$
② $57.06 \leq m \leq 62.94$
③ $58.04 \leq m \leq 61.96$
④ $58.54 \leq m \leq 61.46$
⑤ $59.02 \leq m \leq 60.98$

49

6051-0366

전국 고등학교 야구 선수 중 각 투수들의 투구 속도는 표준편차가 12 km/h인 정규분포를 따른다고 한다. 전국 고등학교 야구 선수 중에서 투수 81명을 임의추출하여 투구 속도를 조사하였더니 평균이 140 km/h이었다. 전국 고등학교 야구 선수 중에서 투수 전체의 투구 속도의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① $137.06 \leq m \leq 142.94$
② $136.92 \leq m \leq 143.08$
③ $137.74 \leq m \leq 142.26$
④ $136.56 \leq m \leq 143.44$
⑤ $136.42 \leq m \leq 143.58$

정답과 풀이 77쪽

유형 11 표본비율의 분포

출제유형 | 표본비율의 뜻을 이해하고, 표본비율의 확률분포를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$를 따르고 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. (단, $q=1-p$)

필수 유형 | 2011학년도 대수능 |

우리나라 성인을 대상으로 특정 질병에 대한 항체 보유 비율을 조사하려고 한다. 모집단의 항체 보유 비율을 p, 모집단에서 임의로 추출한 n명을 대상으로 조사한 표본의 항체 보유 비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, $|\hat{p}-p| \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$일 확률이 0.9544 이상이 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이다.) [4점]

출제 의도

모집단에서 모비율 p의 확률분포를 이해하고, 모비율 p와 표본비율 $\hat{p}$ 사이의 관계를 이용하여 표본의 크기 n의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$를 따르고 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$도 근사적으로 표준정규분포

$\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|Z| \le 2)=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.9544$이므로

$$\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p| \le 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)=0.9544$$

$\mathrm{P}(|\hat{p}-p| \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}) \ge 0.9544$에서

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \le 0.16$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{25}{2}$$

$$n \ge \frac{625}{4}=156.25$$

따라서 n의 최솟값은 157이다.

답 157

50

6051-0367

사건 A에 대한 모비율이 0.1인 모집단에서 크기가 900인 표본을 임의추출할 때, 사건 A에 대한 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 $\mathrm{P}(0.09 \le \hat{p} \le 0.12)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6687 ② 0.8185 ③ 0.8664
④ 0.9104 ⑤ 0.9544

51

6051-0368

어느 도시에 살고 있는 사람들의 20%는 우리나라 연간 1인당 전기 사용량의 평균보다 더 많은 전기를 사용한다고 한다. 이 도시에 살고 있는 사람들 중 80명을 임의로 추출하였을 때, 이 사람들 중 우리나라 연간 1인당 전기 사용량의 평균보다 더 많은 전기를 사용하는 사람의 비율의 분산을 a라 하자. $1000a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

52

6051-0369

어느 지역의 전체 학생 중에서 도서관을 이용하는 학생의 비율이 80%라 한다. 이 지역의 전체 학생 중에서 100명을 임의로 추출하였을 때, 도서관을 이용하는 학생의 비율이 76% 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8185 ③ 0.8413
④ 0.9710 ⑤ 0.9772

유형 12 모비율의 추정

출제유형 | 표본비율의 뜻을 이해하고 표본비율을 이용하여 모비율을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율을 $\hat{p}$이라 할 때, n이 충분히 크면 모비율 p에 대한 신뢰구간은 각각 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

(1) 신뢰도 95% : $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99% : $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

필수 유형

어느 도시의 시민 중에서 400명을 임의추출하여 수학축전 개최 의견을 조사하였더니 찬성자가 320명이었다고 할 때, 이 도시 전체 시민의 찬성률 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① $0.7685\le p\le 0.8315$　② $0.7658\le p\le 0.8342$
③ $0.7624\le p\le 0.8376$　④ $0.7608\le p\le 0.8392$
⑤ $0.7596\le p\le 0.8404$

출제 의도

표본비율을 이용하여 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

표본의 크기 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{320}{400}=0.8$, $\hat{q}=1-\hat{p}=0.2$

표본의 크기가 충분히 크므로 찬성률 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.8-1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}\le p\le 0.8+1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}$ 에서

$0.7608\le p\le 0.8392$

답 ④

53 6051-0370

모집단에서 크기가 400인 표본을 임의추출하여 얻은 표본비율 $\hat{p}$이 $\frac{4}{5}$일 때, 모비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① $0.7384\le p\le 0.8616$　② $0.7444\le p\le 0.8556$
③ $0.7484\le p\le 0.8516$　④ $0.7544\le p\le 0.8456$
⑤ $0.7584\le p\le 0.8416$

54 6051-0371

어느 모집단에서 크기가 144인 표본을 임의추출하여 얻은 표본비율 $\hat{p}$이 0.64이다. 모비율 p를 신뢰도 99%로 추정할 때, $|\hat{p}-p|$의 최댓값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 0.1032　② 0.1082　③ 0.1132
④ 0.1182　⑤ 0.1232

55 6051-0372

어느 지역에 사는 사람들 중 100명을 임의추출하여 등산, 낚시, 영화, 기타 중에서 가장 선호하는 것을 조사한 결과, 등산으로 답한 사람이 m명으로 가장 많았다. 이 지역에 사는 전체 사람 중 등산을 선호하는 사람의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a-0.0588\le p\le a+0.0588$일 때, m의 값은? (단, a는 상수이고, 조사에 응한 사람은 등산, 낚시, 영화, 기타 중에서 반드시 하나만을 답했으며, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 75　② 80　③ 85
④ 90　⑤ 95

MEMO

이 책의 **차례**

실전편

- EBS*i* 홈페이지(www.ebs*i*.co.kr)에 들어오셔서 회원으로 등록하세요.
- 본 방송 교재의 강의 프로그램은 EBS 인터넷 방송을 통해 다시 보실 수 있습니다. (VOD 무료 서비스 실시)
- 교재 및 강의 내용에 관한 문의는 EBS*i* 홈페이지(www.ebs*i*.co.kr)의 학습 Q&A 서비스를 활용하시기 바랍니다.

정답과 풀이 80쪽

01

6051-0373

$(\sqrt[3]{16})^2 \div 4^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

02

6051-0374

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2-(2n-1)^2}{n^2-1}$ 의 값은? [2점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

03

6051-0375

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 조건 p는 다음과 같다.

p : x는 12의 약수이다.

조건 p의 진리집합의 원소의 개수는? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

04

6051-0376

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대하여 $n(A\cup B)=4$를 만족시키는 집합 U의 부분집합 B의 개수는? [3점]

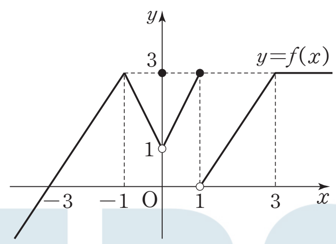
① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

정답과 풀이 80쪽

05

6051-0377

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(-x) + \lim_{x \to 0-} f(x+1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06

6051-0378

다항식 $(x^2+a)^5$의 전개식에서 x^6의 계수가 360일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

07

6051-0379

두 함수 $f(x)=\frac{2x+a}{x-1}$, $g(x)=b+\frac{3}{x+c}$이 서로 역함수일 때, $g(a)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

08

6051-0380

어느 학교 테니스동아리는 1학년 2명, 2학년 4명, 3학년 3명으로 구성되어 있다. 이 9명의 학생 중에서 임의로 2명을 뽑아 대표로 대회에 출전시키려고 할 때, 같은 학년에서 뽑히지 않을 확률은? [3점]

① $\frac{25}{36}$ ② $\frac{13}{18}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{29}{36}$

09 6051-0381

x에 대한 삼차방정식 $x^3-12x+3-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 31 ② 30 ③ 29
④ 28 ⑤ 27

10 6051-0382

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4=8a_1,\ a_8=a_4^2+a_5$$

일 때, 첫째항 a_1의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

11 6051-0383

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식

$$f(x)=x^4-2x^3+f'(2)x^2-2x+4f'(2)$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -13 ② -11 ③ -9
④ -7 ⑤ -5

12 6051-0384

철재 강선의 인장력은 유도 초음파 속도와 측정 초음파 속도의 차를 이용하여 알 수 있다. 두 철재 강선 A, B의 유도 초음파 속도가 v(m/sec)로 같을 때, 두 철재 강선 A, B의 측정 초음파 속도를 각각 v_A(m/sec), v_B(m/sec)라 하고, 인장력을 각각 P_A(kN), P_B(kN)이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

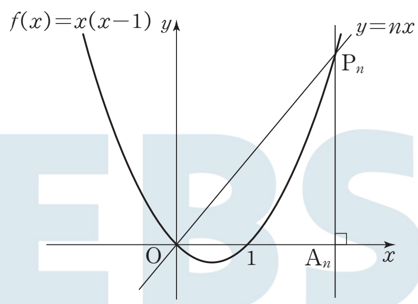
$$P_A=1.24\times(v_A-v)^{1.45},\ P_B=24.8\times(v_B-v)^{1.1}$$

두 철재 강선 A, B의 유도 초음파 속도가 2798(m/sec)로 같고 A, B의 측정 초음파 속도가 각각 2838(m/sec), 2898(m/sec)일 때, $\frac{P_A}{P_B}=2^a\times5^{-1.75}$이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 0.05 ② 0.1 ③ 0.15
④ 0.2 ⑤ 0.25

정답과 풀이 81쪽

[13~14] 그림과 같이 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=x(x-1)$의 그래프와 직선 $y=nx$가 원점 O와 점 P_n에서 만나고, 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 A_n이라 하자. **13**번과 **14**번의 두 물음에 답하시오.



13

6051-0385

곡선 $y=f(x)$ $(x\geq 1)$과 직선 $y=nx$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, S_4의 값은? [3점]

① $\frac{121}{6}$ ② $\frac{61}{3}$ ③ $\frac{41}{2}$
④ $\frac{62}{3}$ ⑤ $\frac{125}{6}$

14

6051-0386

선분 OP_n의 중점을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n이라 하고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q_n에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자. 선분 A_nB_n의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

15

6051-0387

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{10} f'(n)=130$

$f(2)$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

16

6051-0388

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k$$

를 만족시킨다. 다음은

$$a_n=n!\times 2^n-1\ (n\geq 1) \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, $a_1=1=1!\times 2^1-1$이다.
>
> (ii) $n=2$일 때, $a_2=(1+1)^2+3a_1=7$이고,
> $a_2=2!\times 2^2-1=7$이므로 $(*)$이 성립한다.
> $n=m$ $(m\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $a_m=m!\times 2^m-1$
>
> $a_{m+1}=\boxed{(가)}+\sum_{k=1}^{m}(2k+1)a_k$
> $=m^2+2m+1+\sum_{k=1}^{m-1}(2k+1)a_k+\boxed{(나)}\times a_m$
> $=a_m+2m+1+\boxed{(나)}\times a_m$
> $=2\times\boxed{(다)}\times(a_m+1)-1$
> $=2\times\boxed{(다)}\times(m!\times 2^m)-1$
> $=(m+1)!\times 2^{m+1}-1$
>
> 이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(1)+g(2)+h(3)$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

17

6051-0389

어느 벽돌 공장에서 생산되는 벽돌 1개의 압축 강도를 확률변수 X라 할 때, X는 평균이 210, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 벽돌 중에서 임의로 추출한 16개 벽돌의 압축 강도의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

$\mathrm{P}(X \le 206)+\mathrm{P}(\overline{X} \le a)=1$이 성립한다. $\mathrm{P}\left(\overline{X} \le a-\frac{1}{4}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, a는 상수이고, 압축 강도의 단위는 kg/cm^{2}이다.) [4점]

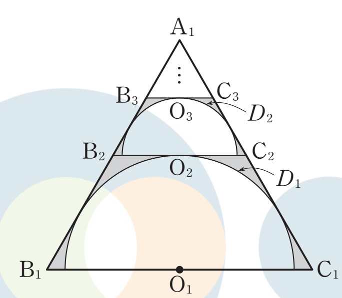
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.7745 ② 0.8185 ③ 0.8413
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

18

6051-0390

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점 $\mathrm{O_1}$을 중심으로 하고 두 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_1C_1}$에 접하는 반원 D_1을 그리고 선분 $\mathrm{A_1O_1}$과 반원 D_1의 교점을 $\mathrm{O_2}$라 하자. 점 $\mathrm{O_2}$를 접점으로 하는 반원 D_1의 접선이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$라 하고 사각형 $\mathrm{B_1C_1C_2B_2}$의 내부와 반원 D_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
정삼각형 $\mathrm{A_1B_2C_2}$에서 점 $\mathrm{O_2}$를 중심으로 하고 두 선분 $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{A_1C_2}$에 접하는 반원 D_2를 그리고 선분 $\mathrm{A_1O_2}$와 반원 D_2의 교점을 $\mathrm{O_3}$이라 하자. 점 $\mathrm{O_3}$을 접점으로 하는 반원 D_2의 접선이 선분 $\mathrm{A_1B_2}$, 선분 $\mathrm{A_1C_2}$와 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$이라 하고 사각형 $\mathrm{B_2C_2C_3B_3}$의 내부와 반원 D_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $10\sqrt{3}-5\pi$ ② $8\sqrt{3}-4\pi$ ③ $6\sqrt{3}-3\pi$
④ $4\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $2\sqrt{3}-\pi$

19 6051-0391

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^2+kt$이고, $t=2$일 때 두 점 P, Q는 수직선 위의 같은 곳에 위치한다. 두 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시각 t의 범위가 $\alpha<t<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

(단, k는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

20 6051-0392

6자리의 자연수 중 다음 조건을 만족시키는 홀수의 개수는? [4점]

(가) 각 자리의 수 중 0의 개수는 1 이하이다.
(나) 각 자리의 수의 합은 7이다.

① 47 ② 48 ③ 49
④ 50 ⑤ 51

21 6051-0393

최고차항의 계수가 5인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
(나) 모든 일차함수 $g(x)$에 대하여
$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$이다.

함수 $f(x)$의 극솟값은? [4점]

① $-\frac{62}{25}$ ② $-\frac{12}{5}$ ③ $-\frac{58}{25}$
④ $-\frac{56}{25}$ ⑤ $-\frac{54}{25}$

22

6051-0394

다항함수 $f(x)$가 $\int xf(x)dx=(x^3+2x)(x^2-2x)+C$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, C는 적분상수이다.) [3점]

23

6051-0395

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(X)=9$일 때, $\mathrm{E}(2X-5)$의 값을 구하시오. [3점]

24

6051-0396

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1+b_1=12,\ \sum_{k=1}^{8} a_k+\sum_{k=1}^{8} b_k=236$$

일 때, a_8+b_8의 값을 구하시오. [3점]

25

6051-0397

두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=ax+5$에 대하여 $(f\circ g)(2)=25$일 때, $(g\circ f)^{-1}(19)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이고, f^{-1}는 f의 역함수이다.) [3점]

26

6051-0398

실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p : $|x-2|\geq 3$

q : $|x|\geq a$

r : $|x|>b$

q는 p이기 위한 필요조건이고, r는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 하자. $40(m-M)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.) [4점]

27

6051-0399

A 주머니에는 흰 공 4개와 검은 공 1개가 들어 있고, B 주머니에는 흰 공 3개와 검은 공 1개가 들어 있다. A 주머니에서 공 2개를 임의로 꺼내어 B 주머니에 넣은 후 B 주머니에서 공 2개를 임의로 꺼내었더니 모두 흰 공이었을 때, A 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 같은 색이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28

6051-0400

8개의 문자 a, a, b, b, b, b, c, c를 일렬로 나열할 때, 두 개의 문자 c와 c 사이에 홀수 개의 문자가 들어가는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 문자끼리는 구별하지 않는다.) [4점]

29

6051-0401

좌표평면 위에서 $|x|+|y|\le 2$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역을 D라 하자. $-2<t<2$인 실수 t에 대하여 영역 D가 직선 $y=t$에 의하여 잘려진 두 영역 중 넓이가 크지 않은 영역의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $90\int_{-1}^{1} S(t)\,dt$의 값을 구하시오. [4점]

30

6051-0402

실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x<3) \\ x^2-4x & (x\ge 3) \end{cases}$$

의 그래프와 직선 $y=tx$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $h(t)$에 대하여 $g(t)h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\lim_{t\to 3}\frac{20g(t)}{h(t)}$의 값을 구하시오. [4점]

정답과 풀이 86쪽

01 ▸ 6051-0403

$4^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[3]{27}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

02 ▸ 6051-0404

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3, 4\}$에 대하여 집합 $A^C \cup B$의 원소의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 ▸ 6051-0405

$\lim_{n \to \infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

04 ▸ 6051-0406

함수 $f(x)=x^3-x^2$에 대하여

$\lim_{h \to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05

6051-0407

두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$P(A\mid B)=\frac{1}{4},\ P(A\cap B^C)=\frac{1}{6}$$

일 때, $P(B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

06

6051-0408

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\frac{x+3}{2},\ g(x)=|x|$$

일 때, $(f^{-1}\circ g)(-2)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

07

6051-0409

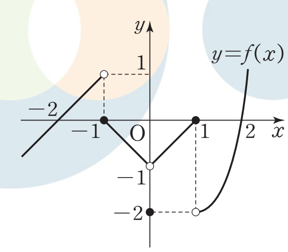
확률변수 X에 대하여 $E(X^2)=6E(X)$, $E(X)>1$이고 $V(X)=5$일 때, $E(2X)$의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

08

6051-0410

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(0)+\lim_{x\to 1+} f(x)f(-x)$의 값은? [3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

09

6051-0411

자연수 n에 대하여 원소의 개수가 n인 집합 A의 부분집합의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n-1}+a_n}{a_{2n+1}-a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10

6051-0412

투과도는 빛이 물체를 투과하는 정도를 나타내는 지표이다. 어느 물질에 입사한 빛의 투과도를 T, 흡광계수를 $k(\mathrm{cm}^2/\mathrm{mol})$, 빛 흡수 물질량의 농도를 $c(\mathrm{mol/L})$, 이 물질의 두께를 $D(\mathrm{cm})$라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log T = -kcD$$

흡광계수가 일정한 물질에 입사한 빛의 투과도가 $\frac{1}{4}$이고 빛 흡수 물질량의 농도가 c_0일 때, 이 물질의 두께를 D_1이라 하고, 입사한 빛의 투과도가 $\frac{1}{2}$이고 빛 흡수 물질량의 농도가 $3c_0$일 때, 이 물질의 두께를 D_2라 하자. $\frac{D_2}{D_1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

11

6051-0413

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=n(n+1)$일 때,

$\sum_{k=1}^{11} a_{2k} - \sum_{k=1}^{11} a_{2k-1}$의 값은? [3점]

① 261 ② 262 ③ 263 ④ 264 ⑤ 265

12

6051-0414

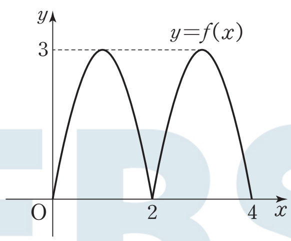
어느 토론대회에 참가하여 본선에 진출한 사람들의 남녀 비율은 남자가 60%, 여자가 40%이고, 본선에 진출한 사람들 중에서 남자들의 80%와 여자들의 20%는 본선에서 제시된 주제에 찬성을 선택하였다. 본선에 진출한 사람 중 임의로 선택한 한 명이 본선에서 제시된 주제에 대하여 찬성한 사람일 때, 그 사람이 남자일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

[13~14] 그림은 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x(2-x) & (0\le x<2) \\ 3(2-x)(x-4) & (2\le x\le 4) \end{cases}$$

의 그래프를 나타낸 것이다. **13**번과 **14**번의 두 물음에 답하시오.



13

6051-0415

함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

14

6051-0416

방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11

④ 13 ⑤ 15

15

6051-0417

다음은 4 이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{35}{64}\times\frac{4^n}{\sqrt{n}}\le {}_{2n}\mathrm{C}_n \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=4$일 때

$\frac{35}{64}\times\frac{4^4}{\sqrt{4}}=70$, ${}_8\mathrm{C}_4=70$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge 4)$일 때

$\frac{35}{64}\times\frac{4^k}{\sqrt{k}}\le {}_{2k}\mathrm{C}_k$

가 성립한다고 가정하자.

$${}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1}={}_{2k}\mathrm{C}_k\times\frac{2\times\boxed{(가)}}{k+1}$$

$$\ge\frac{35}{64}\times\frac{4^k}{\sqrt{k}}\times\frac{2\times\boxed{(가)}}{k+1}$$

$$=\frac{35}{64}\times\frac{4^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\times\sqrt{\frac{4k^2+\boxed{(나)}}{4k^2+4k}}$$

이때 $\sqrt{\frac{4k^2+\boxed{(나)}}{4k^2+4k}}\ge 1$이므로

$\frac{35}{64}\times\frac{4^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\le {}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 4 이상의 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $g(10)-f(10)$의 값은? [4점]

① 10 ② 20 ③ 30

④ 40 ⑤ 50

16

6051-0418

어느 두부 공장에서 생산하는 두부 한 모의 무게는 평균이 450 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 두부 중에서 네 모를 임의추출하여 한 상자에 넣어 판매할 때, 두부 한 상자의 무게가 1780 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 상자의 무게는 생각하지 않는다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228　② 0.0668　③ 0.1587
④ 0.2255　⑤ 0.3085

17

6051-0419

빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색 공이 각각 2개씩 모두 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 재민이가 임의로 2개의 공을 꺼내고, 남은 공 중에서 다시 임의로 2개의 공을 꺼낸다. 재민이가 두 번째로 꺼낸 2개의 공이 처음으로 색이 같을 확률은? [4점]

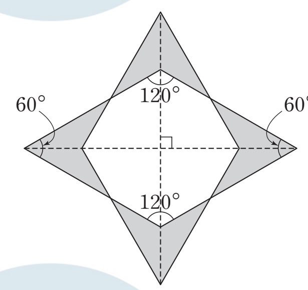
① $\frac{1}{21}$　② $\frac{2}{21}$　③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{4}{21}$　⑤ $\frac{5}{21}$

18

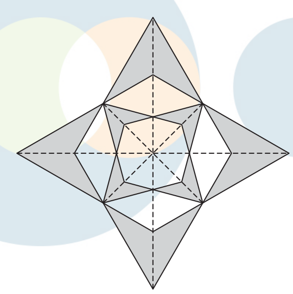
6051-0420

그림과 같이 한 변의 길이가 2이고 마주 보는 두 내각의 크기가 각각 60°, 120°인 마름모 2개를 공통부분이 모든 변의 길이가 같은 팔각형이 되도록 그리고, 두 마름모의 내부이면서 공통부분이 아닌 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 두 마름모의 네 교점 중 각각 두 점을 두 꼭짓점으로 하여 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 마름모 2개를 그리고, 두 마름모의 내부이면서 공통부분이 아닌 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

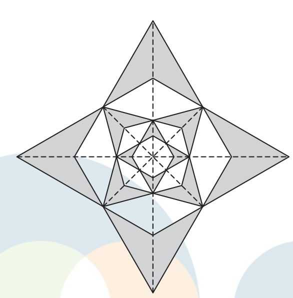
(단, 모든 마름모의 대각선의 교점은 일치한다.) [4점]



R_1



R_2



R_3

⋮

① $3-\sqrt{3}$　② $3-\sqrt{2}$　③ $2(3-\sqrt{3})$
④ $2(3-\sqrt{2})$　⑤ $3(3-\sqrt{3})$

19

6051-0421

$0 \leq a \leq 1$일 때, 함수 $f(a)=\int_{0}^{1}|x^2-(2a+2)x+a^2+2a|\,dx$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20

6051-0422

두 양수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax+b$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $f(2\sqrt{a})=f(-\sqrt{a})$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 $2a\sqrt{a}+b$이다.
ㄷ. $0<a<\frac{1}{4}$일 때, 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.

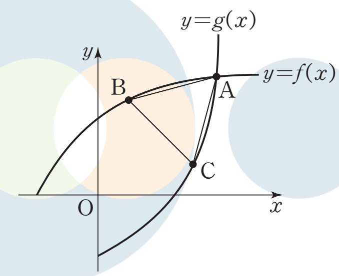
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

6051-0423

그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{3}-3$ ③ $2(\sqrt{2}-1)$
④ $3\sqrt{3}-4$ ⑤ $4(\sqrt{2}-1)$

22

6051-0424

등식 ${}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{2}{3}\times{}_n\mathrm{P}_2$를 만족시키는 2 이상의 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

23

6051-0425

똑같은 4개의 상자에 똑같은 10개의 공을 나누어 담을 때, 빈 상자가 없도록 담는 모든 방법의 수를 구하시오. [3점]

24

6051-0426

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p : $6\le x\le 10$, q : $0\le x<a$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하시오. [3점]

25

6051-0427

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 1) \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 연속일 때, $\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)$의 값을 구하시오. [3점]

26

6051-0428

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_n\times a_{n+1}=2^n\ (n\ge 1)$일 때, $\log_2(a_{10}\times a_{15})$의 값을 구하시오. [4점]

정답과 풀이 90쪽

27

6051-0429

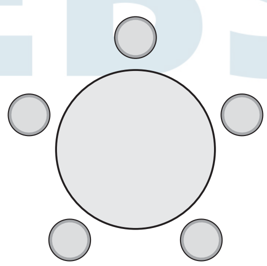
검은 공 4개와 흰 공 5개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 공의 색을 확인한 후 상자에 다시 넣는 시행을 980회 반복할 때, 나온 검은 공의 개수가 2인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \le n) \ge 0.8413$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

28

6051-0430

그림과 같은 원형의 탁자에 5개의 의자가 같은 간격으로 놓여 있다.



어느 날 A, B, C, D, E의 5명이 오전 회의를 한 후에 다시 오후에 회의를 할 때, 5명이 모두 오전 회의 때 앉았던 자리와 그 이웃하는 자리에는 앉지 않고 다른 자리에 앉으려고 한다. 그 날 5명이 모두 회의 때 자리에 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 오전 회의 때만 앉았던 자리가 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

29

6051-0431

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_1^4 f'(x)\,dx$의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

(나) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = 8$

(다) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

30

6051-0432

양수 x에 대하여 x의 소수 부분을 $f(x)$라 하자. 3 이상의 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{n}\right)$가 자연수이고 n의 배수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값을 a_n이라 할 때, $a_9 + a_{10}$의 값을 구하시오. [4점]

정답과 풀이 92쪽

01

6051-0433

$\frac{1}{8} \times 16^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

02

6051-0434

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3, 4\}$에 대하여 집합 $A^C \cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

03

6051-0435

$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n-1)^2-n^2}{6n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

04

6051-0436

세 수 2, $\frac{(a+1)^2}{2}$, $a+11$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

05

6051-0437

유리함수 $f(x)=\frac{ax+2}{x-5}$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점의 좌표가 $(b, 5)$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

$\left(\text{단, } a\neq -\frac{2}{5}\right)$ [3점]

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

06

6051-0438

다항식 $(x^2+a)^5(2x^3+1)$의 전개식에서 x^7의 계수가 160일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

07

6051-0439

자연수 14의 분할 중에서 숫자 4를 포함하고 2개 이상의 짝수의 합으로만 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

08

6051-0440

남학생 5명과 여학생 3명이 있다. 이 8명을 임의로 2명씩 4팀으로 나눌 때, 남학생만으로 구성된 팀이 한 팀만 있을 확률은?

[3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

09

6051-0441

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B^C\mid A)=\frac{4}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

10

6051-0442

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^2\times k!\}=(n-2)\times(n+1)!+2 \quad \cdots\cdots (*)$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=0^2\times 1!=0$, (우변)$=(-1)\times 2!+2=0$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\{(k-1)^2\times k!\}=(m-2)\times(m+1)!+2$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}\{(k-1)^2\times k!\}=(m-2)\times(m+1)!+\boxed{(가)}$$

$$=\boxed{(나)}+2$$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(8)-2}{g(7)}$의 값은? [3점]

① 10 ② $\frac{32}{3}$ ③ $\frac{34}{3}$

④ 12 ⑤ $\frac{38}{3}$

11

6051-0443

어느 과수원에서 올해 수확한 A 과일 1개의 직경은 평균이 61 mm, 표준편차가 5 mm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서는 올해 수확한 과일을 시장에 출하하기 전에 여러 단계의 품질 검사를 수행하는데 1단계로 크기 검사를 한다. 올해 수확한 A 과일 1개의 직경이 49 mm 이상이고 71 mm 이하이면 1단계 품질 검사를 통과한다고 한다. 이 과수원에서 올해 수확한 A 과일 중에서 임의로 선택한 1개가 1단계 품질 검사를 통과할 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.2	0.3849
1.6	0.4452
2.0	0.4772
2.4	0.4918
2.8	0.4974

① 0.9224 ② 0.9370 ③ 0.9690

④ 0.9746 ⑤ 0.9892

12

6051-0444

실수 x에 대하여 두 조건 p, q는 다음과 같다.

p : $|x|+|x-1|\le 5$

q : $x\le a$ 또는 $x>b$

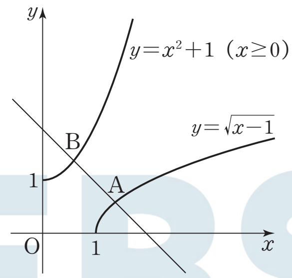
명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 참이 되기 위한 정수 a의 최댓값과 정수 b의 최솟값의 합은? (단, $a<b$) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

정답과 풀이 93쪽

[13~14] 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프 위의 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 함수 $y=x^2+1\ (x\geq 0)$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. **13**번과 **14**번의 두 물음에 답하시오.



13

6051-0445

선분 AB의 길이의 최솟값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{9\sqrt{2}}{16}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{8}$
④ $\frac{11\sqrt{2}}{16}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

14

6051-0446

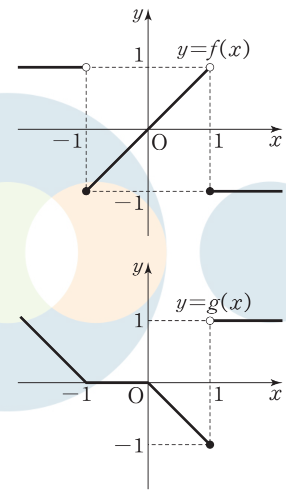
직선 AB가 x축과 만나는 점을 C, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 H의 x좌표를 $t\ (t>1)$이라 할 때, 점 D$(1, 0)$에 대하여 $\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{\mathrm{AC}}^3}{\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AH}}}$의 값은? [4점]

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

15

6051-0447

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. $\lim_{x\to -1} f(x)g(x)=0$

ㄴ. 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16 6051-0448

어떤 Z 이온에 대한 투과성이 있는 반투과성 막의 안과 밖의 Z 이온의 이온 농도가 각각 C_i, C_o인 반투과성 막 사이의 Z 이온의 평형전위 E는 다음과 같은 관계식을 만족시킨다고 한다.

$E=\frac{k}{z}\log\frac{C_o}{C_i}$ (단, k는 상수, z는 Z 이온의 전하로 상수이다.)

이 반투과성 막의 안과 밖의 Z 이온의 이온 농도가 각각 $400a$, a인 반투과성 막 사이의 Z 이온의 평형전위를 E_1, 이 반투과성 막의 안과 밖의 Z 이온의 이온 농도가 각각 $20b$, b인 반투과성 막 사이의 Z 이온의 평형전위를 E_2라 할 때, $\frac{E_1}{E_2}$의 값은?

(단, a, b는 양수이고, 이온 농도의 단위는 mM, 평형전위의 단위는 mV이다.) [4점]

① 8　② 4　③ 2　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{4}$

17 6051-0449

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가 있다. 합성함수 $(f\circ f)(x)$의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이고, $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때, $f(1)+f(2)$의 값은? [4점]

① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

18 6051-0450

스마트폰의 어플 A를 이용하는 사람들의 하루 동안의 어플 A의 이용시간은 표준편차가 40인 정규분포를 따른다고 한다. 어플 A를 이용하는 사람들 중에서 400명을 임의추출하여 하루 동안의 어플 A의 이용시간을 조사하였더니 하루 동안의 어플 A의 이용시간의 평균이 150이었다. 어플 A를 이용하는 사람들의 하루 동안의 어플 A의 이용시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이다. $100(b-a)$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$로 계산하고 시간의 단위는 분이다.)
[4점]

① 774　② 779　③ 784　④ 789　⑤ 794

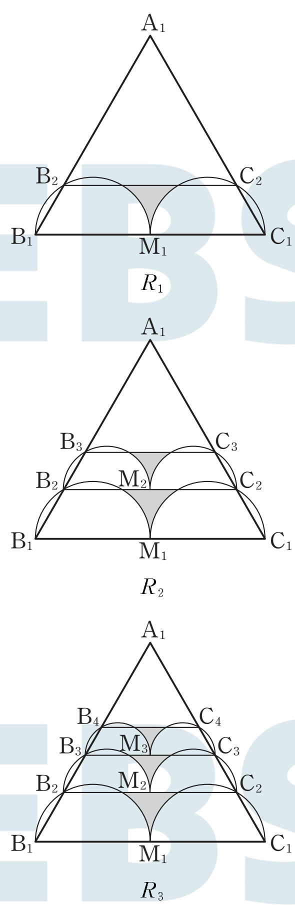
19

6051-0451

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$에서 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자. 선분 B_1M_1을 지름으로 하는 반원이 선분 A_1B_1과 점 B_1이 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 B_2, 선분 M_1C_1을 지름으로 하는 반원이 선분 A_1C_1과 점 C_1이 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 C_2라 하자. 두 반원과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 ▽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하자. 선분 B_2M_2를 지름으로 하는 반원이 선분 A_1B_2와 점 B_2가 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 B_3, 선분 M_2C_2를 지름으로 하는 반원이 선분 A_1C_2와 점 C_2가 아닌 점에서도 만나도록 그리고, 그 만나는 점을 C_3이라 하자. 새로 그린 두 반원과 선분 B_3C_3으로 둘러싸인 ▽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



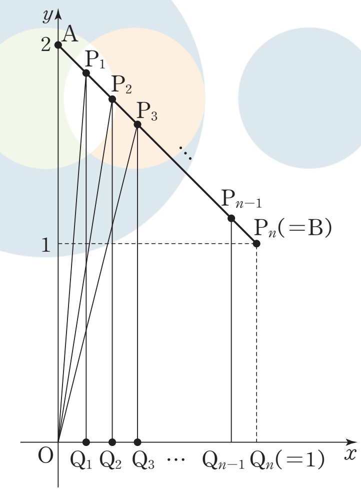
⋮

① $\frac{16}{21}(8\sqrt{3}-4\pi)$　② $\frac{16}{21}(9\sqrt{3}-4\pi)$
③ $\frac{16}{21}(10\sqrt{3}-4\pi)$　④ $\frac{16}{21}(9\sqrt{3}-3\pi)$
⑤ $\frac{16}{21}(10\sqrt{3}-3\pi)$

20

6051-0452

그림과 같이 두 점 $A(0,\ 2)$와 $B(1,\ 1)$을 지나는 선분 AB를 n등분하는 점과 점 B를 포함하여 점 A에 가까운 점부터 순서대로 $P_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$라 하고, 점 P_k에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_k라 하자. 삼각형 OQ_kP_k의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{7}{9}$

21

6051-0453

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는
$g(x)=f(x)-|f'(x)|$이다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=4$
> (나) $f(a)=g(a)=0$인 1보다 큰 상수 a가 존재한다.
> (다) 함수 $f(x)$의 극댓값은 4이다.

$a\times f(5)$의 값은? [4점]

① 40　② 45　③ 50
④ 55　⑤ 60

22

6051-0454

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} a_k=30$, $\sum_{k=1}^{20} b_k=10$일 때, $\sum_{k=1}^{20}(a_k-2b_k+1)$의 값을 구하시오. [3점]

23

6051-0455

함수 $f(x)=3x^3+ax+2$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{5h}=8$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.) [3점]

24

6051-0456

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	4	8	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{5}{2}a^2$	1

$\mathrm{E}(5X-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [3점]

25

6051-0457

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, x축과 서로 다른 세 점에서 만난다. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-2}^{x} f(t)\,dt\geq 0$을 만족시킨다.

$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

26

6051-0458

어느 회사의 전체 회사원을 대상으로 이 회사에서 생산된 두 제품 A, B 중 선호하는 제품을 조사하였다. 이 회사의 남자 회사원 중에서 $\frac{1}{3}$은 A 제품을 선호하고, 이 회사의 전체 회사원 중 A 제품을 선호하는 회사원의 수는 남자 회사원의 수의 $\frac{1}{2}$이다. 이 회사 전체 회사원 중에서 임의로 선택한 한 명이 A 제품을 선호하였을 때, 이 사람이 남자일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, 이 회사의 모든 회사원은 선호하는 제품으로 A 제품과 B 제품 중에서 하나만 반드시 선택해야 하고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27 6051-0459

0이 아닌 세 정수 a, b, c에 대하여 $|a|+|b|+|c|=10$을 만족시키는 모든 순서쌍(a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

28 6051-0460

두 함수 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$과 $g(x)=(x-3)(x-t)$의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 $0<x<1$인 점의 x좌표를 a라 하자. 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le a) \\ g(x) & (x>a) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, $30a$의 값을 구하시오. (단, $t<3$) [4점]

29 6051-0461

1반, 2반, 3반의 학생이 각각 2명씩인 6명의 학생이 모두 원형의 탁자에 둘러앉아 각각 2개씩 준비된 세 종류의 음식 A, B, C를 먹으려고 한다. 한 사람은 한 개의 음식만 먹을 수 있을 때, 같은 반 학생끼리는 서로 이웃하여 앉아 서로 다른 종류의 음식을 먹는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 음식끼리는 서로 구분하지 않고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

30 6051-0462

두 실수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=2x^3-ax^2+2bx-8$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(2)\ge 0$
(나) $f(x)$는 극값을 갖는다.
(다) $\int_0^1 f(x)dx\le 0$

정답과 풀이 99쪽

01

6051-0463

$8^{\frac{2}{3}}+\log_2 \frac{1}{8}$ 의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

02

6051-0464

두 집합 A, B가 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in A\}$일 때, 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

6051-0465

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-2^n}{5\times 2^n+3^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 4 ⑤ 9

04

6051-0466

두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$일 때, $\mathrm{P}(B\,|\,A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

05

6051-0467

$\left(\frac{x}{a}+a\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 40일 때, 상수 a의 값은?

(단, $a\neq0$) [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

06

6051-0468

두 함수 $f(x)=5x-3$, $g(x)=\sqrt{4x+1}$에 대하여 $(g\circ f^{-1})(7)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

07

6051-0469

상자 A에는 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 상자 B에는 6, 6, 6, 7, 7의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 상자 A, B에서 각각 임의로 카드를 한 장씩 꺼낸다. 두 상자 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수일 때, 두 수의 합이 8일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{8}$　⑤ $\frac{3}{4}$

08

6051-0470

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_{10}=3S_5$일 때, $a_{10}=ka_5$를 만족시키는 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{10}{7}$　② $\frac{12}{7}$　③ 2　④ $\frac{16}{7}$　⑤ $\frac{18}{7}$

09

6051-0471

어느 꽃가게에 있는 장미, 백합, 국화 중에서 종류에 상관없이 n송이의 꽃을 구입하는 경우의 수가 120일 때, n의 값은?

(단, 각 종류의 꽃은 15송이 이상씩 있다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

10

6051-0472

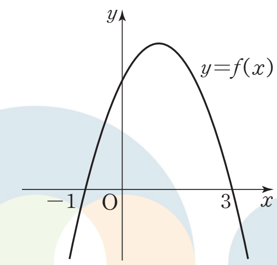
실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

p : $a-4 \le x < a$, q : $|x| \ge 6$

일 때, $\sim q$가 p이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[11~12] 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다. **11**번과 **12**번의 두 물음에 답하시오.



11

6051-0473

$f(0)=3$일 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

12

6051-0474

자연수 n에 대하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(n, f(n))$에서의 접선의 기울기를 a_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} a_k = -30$일 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

13

6051-0475

다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}$일 때,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k}{(k-1)k}=n+1-\frac{n+1}{n}S_n \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=\frac{S_2}{1\times 2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

(우변)$=2+1-\frac{3}{2}S_2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$n=m+1$일 때

$$\sum_{k=2}^{m+1}\frac{S_k}{(k-1)k}=\sum_{k=2}^{m}\frac{S_k}{(k-1)k}+\frac{S_{m+1}}{\boxed{(가)}}$$
$$=m+1-\frac{m+1}{m}S_m+\frac{S_{m+1}}{\boxed{(가)}}$$
$$=m+2-\boxed{(나)}\times S_{m+1}+\frac{S_{m+1}}{\boxed{(가)}}$$
$$=m+2-\frac{m+2}{m+1}S_{m+1}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)g(5)$의 값은? [3점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

14

6051-0476

회원제로 운영되는 어느 할인점의 회원이 2015년에 이 할인점을 방문한 횟수는 평균이 72회, 표준편차가 6회인 정규분포를 따른다고 한다. 이 할인점에서는 2015년에 할인점을 84회 이상 방문한 회원들에게 사은품을 주었다. 이 할인점의 2015년 회원 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 이 회원이 사은품을 받은 회원일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.3413

15

6051-0477

두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+a & (x<2)\\ \dfrac{bx+8}{x-1} & (x\geq 2)\end{cases}$$

의 치역이 $\{y\,|\,y>-2\}$일 때, $f(ab)$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

16

6051-0478

유리함수 $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ (a, b, c, d는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=2$이다.
(나) $f(-1)=3$

양수 t에 대하여 직선 $x=\dfrac{1}{t}$이 x축 및 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 C라 하자. 사각형 OABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\{t\times S(t)\}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

17

6051-0479

어느 공장에서 생산되는 A제품 한 개의 무게 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고, $\mathrm{P}(X\geq 6)=0.5$, $\mathrm{P}(X\leq 4)=0.1587$을 만족시킨다. 이 공장에서 생산된 A제품 중에서 100개를 임의추출하여 조사한 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(5.8\leq \overline{X}\leq 6.2)$의 값은?

(단, 제품의 무게의 단위는 g이다.) [4점]

① 0.3174 ② 0.3413 ③ 0.6587
④ 0.6826 ⑤ 0.8413

18

6051-0480

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)-f(1)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=f(2)=0$
(나) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(2)}{x+1}=6$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

정답과 풀이 102쪽

19

6051-0481

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & (x\neq 0) \\ 3 & (x=0) \end{cases}$$

일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)=0$인 실수 a의 개수는 3이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20

6051-0482

흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 꺼내어 공의 색을 조사한다. 이 주머니에서 두 개의 흰 공을 모두 꺼냈을 때, 그때까지 꺼낸 모든 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 흰 공, 검은 공, 검은 공, 흰 공을 꺼냈을 때, $X=4$이다. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

(단, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.) [4점]

① $\dfrac{14}{3}$　② 5　③ $\dfrac{16}{3}$　④ $\dfrac{17}{3}$　⑤ 6

21

6051-0483

실수 t와 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_0^2 xf(x-2t)\,dx$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$에서 함수 $g(t)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $\dfrac{m}{M}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$　② $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$　③ $2-\sqrt{2}$　④ $\dfrac{4-\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$

22

6051-0484

$\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sqrt{2x+4}-2}$의 값을 구하시오. [3점]

23

6051-0485

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$\log_2 a_3 + \log_2 a_6 - \log_2 a_5 = 5$일 때, a_4의 값을 구하시오. [3점]

24

6051-0486

같은 종류의 연필 7자루를 같은 종류의 필통 3개에 나누어 담으려고 한다. 각 필통에 담은 연필이 4자루 이하가 되도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수를 구하시오.

(단, 빈 필통이 있어도 된다.) [3점]

25

6051-0487

함수 $f(x)=ax^2$에 대하여

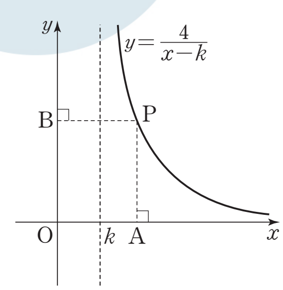
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)=7$$

일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

26

6051-0488

그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=\frac{4}{x-k}$ $(x>k)$의 그래프 위의 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 할 때, $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값이 16이 되도록 하는 k의 값을 구하시오. [4점]



27

6051-0489

알파벳 a와 E, 특수문자 !를 모두 이용하여 5개의 문자가 나열된 비밀번호를 다음과 같은 규칙으로 만들려고 한다.

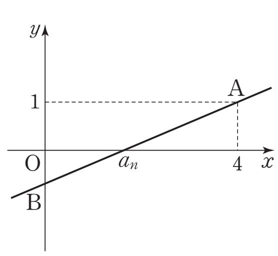
> (가) a, E, !를 각각 최대 2번 사용한다.
> (나) 특수문자 !는 서로 이웃하지 않는다.

만들 수 있는 비밀번호의 개수를 구하시오. [4점]

28

6051-0490

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(4, 1)$, $\mathrm{B}\left(0, -\frac{1}{n}\right)$을 지나는 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$의 값을 구하시오. [4점]



29

6051-0491

정의역과 치역이 실수 전체의 집합인 함수

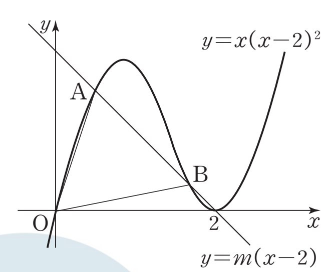
$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+1 & (x<1) \\ -x+b & (x\geq 1) \end{cases}$$

은 일대일 대응이다. $a^2+ab=20$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

30

6051-0492

$-1<m<0$인 실수 m에 대하여 직선 $y=m(x-2)$와 곡선 $y=x(x-2)^2$이 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 삼각형 AOB의 넓이의 제곱을 $S(m)$이라 하자. 열린 구간 $(-1, 0)$에서 함수 $S(m)$의 최댓값을 M이라 할 때, $27M$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



정답과 풀이 106쪽

01

6051-0493

$4^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

02

6051-0494

$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+5}{n^2+3n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

6051-0495

명제 $p \longrightarrow \sim q$의 대우는? [2점]

① $p \longrightarrow q$ ② $\sim p \longrightarrow q$ ③ $q \longrightarrow \sim p$
④ $\sim q \longrightarrow p$ ⑤ $\sim q \longrightarrow \sim p$

04

6051-0496

$f(x)=x^2+2x+3$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

05

6051-0497

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=2$, $a_3=3a_1$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

06

6051-0498

두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A^C \cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

07

6051-0499

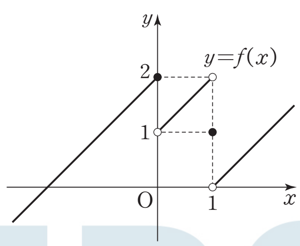
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(400, p)$를 따르고
$\mathrm{E}(2X+3)=203$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, $0<p<1$) [3점]

① 55　② 60　③ 65
④ 70　⑤ 75

08

6051-0500

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x-1)$의 값은? [3점]

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

09

6051-0501

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left|\frac{3k}{n}-1\right|$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

10

6051-0502

$a>1$일 때, $a-\frac{a-10}{a-1}$의 최솟값은? [3점]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

11

6051-0503

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt=3x+a-2\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

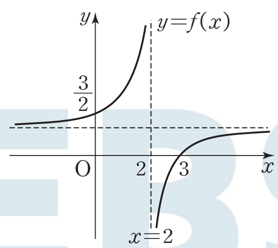
12

6051-0504

같은 종류의 선물 10개를 서로 다른 종류의 봉지 4개에 빈 봉지가 없도록 남김없이 나누어 넣을 때, 적어도 2개의 봉지에 같은 개수의 선물이 들어가도록 넣는 경우의 수는? [3점]

① 60　② 62　③ 64
④ 66　⑤ 68

[13~14] 세 상수 a, b, c에 대하여 유리함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $(3,\ 0)$을 지나고, 이 그래프의 y축과 평행한 점근선의 방정식은 $x=2$이다. **13**번과 **14**번의 두 물음에 답하시오.



13

6051-0505

$(f\circ f)(0)$의 값은? [3점]

① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3

④ $\dfrac{7}{2}$　⑤ 4

14

6051-0506

두 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases},\ h(x)=x^2+px+q$$

에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(1)$의 값은? (단, p, q는 상수이다.) [4점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

15

6051-0507

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)a_{n+1}-(n^2+n)a_n=2^n\times(n+2)!$$

을 만족시킨다. 다음은

$$a_n=2^n\times n!\ (n\geq 1) \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, $a_1=2^1\times 1!=2$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $a_k=2^k\times k!$이므로
>
> $(k+1)a_{k+1}=(k^2+k)a_k+2^k\times(k+2)!$
>
> $(k+1)a_{k+1}=\boxed{(가)}\times 2^k\times(k+1)!+2^k\times(k+2)!$
>
> $(k+1)a_{k+1}=\boxed{(나)}\times 2^k\times(k+1)!$
>
> 이다.
>
> 따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n\times n!$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)\times g(6)$의 값은? [4점]

① 60　② 70　③ 80

④ 90　⑤ 100

정답과 풀이 108쪽

16

6051-0508

실수 전체의 집합의 두 부분집합

$A=\{1, 7, 13, a+2b\}, B=\{1, 2, a+b, 2a+b\}$

에 대하여 $A-B=\{8, 13\}$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합은?

(단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

17

6051-0509

가수와 배우만을 회원으로 하는 어느 봉사 단체가 있다. 이 봉사 단체에 속한 80명의 회원 중에서 임의로 한 명을 선택할 때 다음이 성립한다.

(가) 임의로 선택한 1명이 여자일 때, 이 여자가 배우일 확률은 $\frac{9}{16}$이다.

(나) 임의로 선택한 1명이 남자일 때, 이 남자가 배우일 확률은 $\frac{9}{16}$이다.

(다) 임의로 선택한 1명이 가수일 때, 이 가수가 여자일 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

이 봉사 단체에 속한 80명의 회원 중에서 남자 가수는 몇 명인가? (단, 가수이면서 배우인 회원은 없다.) [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

18

6051-0510

어느 도시의 고등학교 3학년 학생의 75%가 수학 나형을 선택한다고 한다. 이 도시의 고등학교 3학년 학생들 300명을 임의추출하여 조사할 때, 수학 나형을 선택한 학생이 240명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

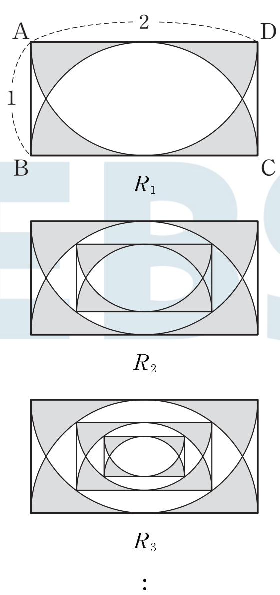
z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.3085 ② 0.1587 ③ 0.0668 ④ 0.0228 ⑤ 0.0062

19

6051-0511

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD 안에 지름이 각각 AD, BC인 두 개의 반원을 그린 후, 두 반원의 내부 중 서로 겹치지 않는 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 반원이 겹치는 부분의 내부에 네 꼭짓점이 두 반원의 호 위에 있고 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $2:1$인 직사각형을 그리고, 이 직사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 반원을 그린 후 두 반원의 내부 중 서로 겹치지 않는 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 그려진 두 반원이 겹치는 부분의 내부에 네 꼭짓점이 두 반원의 호 위에 있고 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $2:1$인 직사각형을 그리고, 이 직사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 반원을 그린 후 두 반원의 내부 중 서로 겹치지 않는 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{50\sqrt{3}-25\pi}{48}$　② $\dfrac{75\pi-125\sqrt{3}}{48}$　③ $\dfrac{50\pi-75\sqrt{3}}{48}$
④ $\dfrac{25\pi-25\sqrt{3}}{48}$　⑤ $\dfrac{75\sqrt{3}-25\pi}{48}$

20

6051-0512

$1\le a\le b\le c\le 4$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개의 순서쌍을 선택할 때, $|a-b|\le|b-c|$를 만족시키는 순서쌍일 확률은? [4점]

① $\dfrac{2}{5}$　② $\dfrac{13}{30}$　③ $\dfrac{11}{20}$
④ $\dfrac{3}{5}$　⑤ $\dfrac{13}{20}$

21

6051-0513

함수 $f(x)=\int_0^x (4t^3+at^2+bt)\,dt$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
(나) x에 대한 방정식 $f(x)=-1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

22

6051-0514

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x+3)}{x-3}$의 값을 구하시오. [3점]

23

6051-0515

$\int_{-3}^{3} (x-1)(x+1)dx$의 값을 구하시오. [3점]

24

6051-0516

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3-a_1=2$, $\sum_{k=1}^{10} a_k=27$일 때, $\sum_{k=11}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

25

6051-0517

그림과 같이 수직선 위에 있는 네 점 A, B, C, D에 대하여

$$\overline{\mathrm{AC}}=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6},\ \overline{\mathrm{BC}}=\log_2 3,\ \overline{\mathrm{BD}}=\log_3 24$$

이다.

$\overline{\mathrm{AD}}=a$일 때, 3^a의 값을 구하시오. [3점]

26

6051-0518

두 양수 a, b에 대하여 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g(1)=-1$이고, 원점 O에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점까지의 거리가 $3\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

27

6051-0519

어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A 중 임의로 1개를 선택할 때, 선택한 제품의 무게가 165 이하일 확률은 0.1587이고 201 이하일 확률은 0.9772이다. m의 값을 구하시오. (단, 제품의 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$로 계산한다.) [4점]

28

6051-0520

삼차함수 $y=x^3-mx^2+3(m+1)x$의 그래프와 일차함수 $y=mx+k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 오직 한 점에서 만나기 위한 실수 m의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

29

6051-0521

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A)=3$
(나) $(B-A)\subset X\subset U$를 만족시키는 집합 X의 개수는 64이다.

집합 B의 모든 원소의 합을 $S(B)$라 할 때, $S(B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

30

6051-0522

A, B, C, D, E 다섯 명의 선수가 출전한 씨름 대회가 있다. 이 대회에서는 출전한 모든 선수가 다른 선수와 각각 한 번씩 씨름 시합을 하여 승리를 가장 많이 거둔 선수를 우승자로 정한다. 모든 선수가 각 시합에서 상대 선수를 이길 확률이 $\frac{1}{2}$로 모두 같을 때, 이 대회에서 선수 E가 선수 A에게만 패하고 나머지 선수에게는 모두 승리하여 3승 1패로 우승할 확률은 $a\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$이다. a의 값을 구하시오. (단, 각 시합에서 비기는 경우는 없고, 선수 E 이외에 3승을 거두는 선수는 없다.) [4점]